ALGÈBRES DE LIE AFFINES ET OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS D'ORDRE INFINI

(AFFINE LIE ALGEBRAS AND PSEUDO-DIFFERENTIAL OPERATORS OF INFINITE ORDER)

A. LESFARI

In this paper we make a careful study of some connection between pseudo-differential operators, Kadomtsev-Petviashvili (KP) hierarchy and tau functions based on the Sato-Date-Jimbo-Miwa-Kashiwara theory. A few other connections and ideas concerning the Korteweg-de Vries (KdV) and Boussinesq equations, the Gelfand-Dickey flows, the Heisenberg and Virasoro algebras are given. The study of the KP and KdV hierarchies, the use of tau functions related to infinite dimensional Grassmannians, vertex operators and the Hirota's bilinear formalism led to obtaining remarkable properties concerning these algebras as for example the existence of an infinite family of first integrals functionally independent and in involution. The paper is supported by an appendix which contains some information about coadjoint orbits in Kac-Moody algebras and a proof of the Adler-Kostant-Symes theorem.

AMS 2010 Subject Classification: 47G30, 17B69, 53D30.

Key words: pseudo-differential operators, tau functions, vertex operator algebras and related structures, Symplectic structures of moduli spaces.

1. **INTRODUCTION**

Dans ce travail, on étudie quelques généralités sur l'algèbre des opérateurs différentiels d'ordre infini. Les algèbres de Virasoro, de Heisenberg, les équations d'évolution non-linéaires telles que les équations de Korteweg-de Vries (KdV), de Boussinesq ainsi que celle de Kadomtsev-Petviashvili (KP) jouent un rôle crucial dans cette étude. L'étude des hiérarchies Korteweg-de Vries et Kadomtsev-Petviashvili, l'utilisation des fonctions tau liées aux variétés grassmanniennes de dimension infinie, des opérateurs de vertex ainsi que le formalisme bilinéaire de Hirota ont conduit à l'obtention de propriétés remarquables concernant ces algèbres, comme par exemple l'existence d'une famille

MATH. REPORTS **14(64)**, *1* (2012), 43–69

infinie d'intégrales premières fonctionnellement indépendantes et en involution. Récemment, l'élaboration de méthodes puissantes et la découverte de leurs structures algébriques communes ont conduit à des développements importants concernant l'étude des problèmes non-linéaires (voir par exemple [27, 28, 29] pour une vue d'ensemble).

Les fonctions $\tau(t)$ sont des fonctions spécifiques du temps, construites à partir de sections d'un fibré déterminant sur une variété grassmannienne de dimension infinie. Ces fonctions "généralisent" les fonctions thêta de Riemann et ce sont des solutions de la hiérarchie Kadomtsev-Petviashvili (KP), i.e., solutions d'une suite infinie d'équations aux dérivées partielles non-linéaires [8] reliant une infinité de fonctions en une infinité de variables. Les fonctions $\tau(t)$ peuvent être des polynômes de Schur, relevant de la théorie des représentations des groupes ou des déterminants de Fredholm. La première fonction tau à été introduite par Sato, Miwa et Jimbo en relation avec la théorie de déformations isomonodromiques. Elle a été définie comme une fonction de corrélation de certains champs quantiques, associés aux pôles d'un système fuchsien sur la sphère de Riemann. Ces fonctions donnent des informations sur la topologie des espaces de modules des surfaces de Riemann et sont étroitement liées à la théorie des représentations des algèbres de Virasoro et des W-algèbres. Les fonctions $\tau(t)$ jouent un rôle important dans un grand nombre de branches des mathématiques et de la physique théorique, comme les systèmes intégrables, les théories de cordes, les théories de jauge quantique, les déformations isomonodromiques, les modèles matriciels (gravité quantique), les intégrales matricielles associées ont des développements en séries perturbatrices dont les termes comptent les triangulations sur des surfaces (graphes de Feynman), les problèmes de modules et dans bien d'autres domaines. En fait au cours de ces dernières années (voir [29]), de nombreux problèmes se rattachant à la géométrie algébrique, la combinatoire, les probabilités et la théorie de jauge quantique, ..., ont été résolus explicitement par des méthodes inspirées des techniques issues de l'étude des systèmes intégrables. En particulier l'étude des matrices aléatoires, domaine qui établit des liens avec plusieurs problèmes, par exemple avec la combinatoire, les probabilités, la théorie des nombres, les modèles de croissances et de pavages aléatoires et les questions de technologie de la communication. Les fonctions $\tau(t)$ sont la source d'inspiration pour bon nombre de mathématiciens et physiciens en quête de nouvelles structures algébriques apparaissant en mathématique et en physique.

2. OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS ET STRUCTURES SYMPLECTIQUES

Soit L un opérateur pseudo-différentiel à coefficients holomorphes. L'ensemble de ces opérateurs forme une algèbre de Lie que l'on note $\mathcal{A}$. L'algèbre

$\mathcal{A}$ se décompose en deux sous-algèbres $\mathcal{A}_+$ et $\mathcal{A}_-$: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \oplus \mathcal{A}_-$, où $\mathcal{A}_+$ est l'algèbre des opérateurs différentiels de la forme

$$\zeta = \sum_{k\geq 0} u_k(x)\partial^k, \quad \text{somme finie}, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial x},$$

et $\mathcal{A}_-$ est l'algèbre des opérateurs strictement pseudo-différentiels de la forme

$$\eta = \sum_{k>0} u_{-k}(x)\partial^{-k} = \partial^{-1}v_0 + \partial^{-2}v_1 + \cdots, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial x}.$$

L'algèbre $\mathcal{A}$ peut-être vue comme étant une algèbre associative pour le produit de deux opérateurs pseudo-différentiels L et L',

$$L.L' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{:}\partial_\partial^k(L).\partial_x^k(L')\mathbf{:},$$

où $\partial = \frac{\partial}{\partial x}$ et le symbole $\mathbf{:\,:}$ désigne l'ordre normal, i.e., il signifie que les dérivées figurent toujours à droite indépendamment des relations de commutation.

Exemple 2.1. Pour $m, n \in \mathbb{N}^*$, on a pour toutes fonctions u, v,

$$u\partial^m.v\partial^n = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} uv^{(k)}\partial^{m+n-k} = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \mathbf{:}\partial_\partial^k(u\partial^m).\partial_x^k(v\partial^n)\mathbf{:}, \tag{1}$$

et

$$\begin{aligned} \partial^{-1}u &= u\partial^{-1} - u'\partial^{-2} + u''\partial^{-3} + \cdots + (-1)^k u^{(k)}\partial^{-k-1} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{:}\partial_\partial^k(\partial^{-1}).\partial_x^k(u)\mathbf{:}, \end{aligned} \tag{2}$$

où ∂^{-1} est un inverse formel de ∂, i.e., $\partial^{-1}.\partial = \partial.\partial^{-1} = 1$.

On peut définir un couplage entre $\mathcal{A}_+$ et $\mathcal{A}_-$ comme suit: Soit $\text{Rés}(\zeta\eta)$ le coefficient de ∂^{-1} dans $\zeta\eta$. On a

$$\begin{aligned} \langle \zeta, \eta \rangle &= \left\langle \sum_{k\geq 0} u_k\partial^k, \sum_{k>0} u_{-k}\partial^{-k} \right\rangle = \langle u_0\partial^0 + u_1\partial^1 + \cdots, \partial^{-1}v_0 + \partial^{-2}v_1 + \cdots \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{Rés}(\zeta\eta)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k\geq 0} u_k v_k \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Dès lors, le groupe de Volterre $(I+\mathcal{A}_-)$ agit sur $\mathcal{A}_-$ par l'action adjointe et sur $\mathcal{A}_+$ par l'action coadjointe. Soit $\zeta \in \mathcal{A}_+$ et $\eta_k \in \mathcal{A}_-$, d'où [1]

$$\langle ad^*_{\eta_1}(\zeta), \eta_2\rangle = \langle \zeta, ad_{\eta_1}(\eta_2)\rangle = \langle \zeta, [\eta_1,\eta_2]\rangle =$$
$$= \int \left(\partial^{-1} - \text{terme de } (\zeta\eta_1\eta_2 - \zeta\eta_2\eta_1)\right) \mathrm{d}x =$$
$$= \int \left(\partial^{-1} - \text{ terme de } \ (\zeta\eta_1 - \eta_1\zeta)_+ \eta_2\right) \mathrm{d}x = \langle [\zeta,\eta_1]_+, \eta_2\rangle.$$

Donc, l'ensemble $\mathcal{O}^*_{\mathcal{A}_+}(L)$ des opérateurs différentiels de la forme

$$L = \partial^N + \sum_{k=0}^{N-2} u_k(x)\partial^k, \quad N \text{ fixé}, \tag{3}$$

est une orbite coadjointe dans $\mathcal{A}_+$.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ en x et dépendant d'un nombre fini de dérivées $u_k^{(l)}$ des coefficients u_k de L. Soit

$$\nabla H(L) = \sum_{k=0}^{N-1} \partial^{-k-1} \sum_l (-1)^l \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l \frac{\partial f}{\partial p_k^{(l)}} = \sum_{k=0}^{N-1} \partial^{-k-1} \frac{\delta H}{\delta u_k},$$

le gradient de la fonctionnelle (définie sur $\mathcal{A}_+$),

$$H(L) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ldots,u_k^{(l)},\ldots)\mathrm{d}x,$$

et tel que:

$$\mathrm{d}H = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\delta H}{\delta u_k} \mathrm{d}u_k = \left\langle \sum_{k=0}^{N} \mathrm{d}u_k.\partial^k, \nabla H \right\rangle = \langle \mathrm{d}L, \nabla H\rangle,$$

où $\mathrm{d}L = \sum_{k=0}^N \mathrm{d}u_k.\partial^k$. On rappelle que le produit scalaire entre deux opérateurs pseudo-différentiels L et L' est défini par

$$\langle L, L'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} (LL')_- \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} (L'L)_- \mathrm{d}x).$$

D'après le théorème d'Adler-Kostant-Symes (voir appendice), les champs de vecteurs hamiltoniens sur l'orbite coadjointe $\mathcal{O}^*_{\mathcal{A}_+}$, définissent des flots commutatifs et sont donnés par

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = ad^*_{\nabla H(L)}(L) = [L, \nabla H(L)]_+, \tag{4}$$

où $H(L)$ est l'hamiltonien sur $\mathcal{A}_+$. Notons que l'opérateur L ne contient pas le coefficient u_{N-1}. Comme le champ de vecteurs (4) appliqué à l'opérateur L (3) impose la condition

$$\text{Rés}[L, \nabla H(L)] = 0,$$

on peut donc remplacer le gradient $\frac{\delta H}{\delta p_{N-1}}$ par n'importe quelle expression satisfaisant à cette condition. Dès lors un premier crochet (de Poisson) est donné par

$$\{H, F\}_1 = \langle L, [\nabla F, \nabla H]\rangle = \int \text{Rés}\,(\nabla H[L, \nabla F]_+)\,\mathrm{d}x = \tag{5}$$
$$= \int \text{Rés}\,(\nabla H[L, \nabla F])\,\mathrm{d}x = \int \text{Rés}\,([\nabla H, L]\nabla F)\,\mathrm{d}x.$$

Considérons les hamiltoniens

$$H_{k+N} = \frac{N}{k+N}\int \left(\text{Rés}\ L^{\frac{k+N}{N}}\right)\mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

On a

$$\nabla H^{(L)}_{k+N} = \left(L^{\frac{k}{N}}\right)_-,$$

et les champs de vecteurs (4) appliqués à ces hamiltoniens, fournissent les équations intégrables; N-réduction de Gel'fand Dickey de la hiérarchie KP (voir plus loin pour la définition) suivantes:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \left[L, \nabla H_{k+N}(L)\right]_+ = -\left[(L^{\frac{k}{N}})_-, L\right]_+ = \left[(L^{\frac{k}{N}})_+, L\right]. \tag{6}$$

Notons que puisque

$$\left[(L^{\frac{k}{N}})_+, L\right]_+ = \left[L^{\frac{k}{N}} - (L^{\frac{k}{N}})_-, L\right]_+ = -\left[(L^{\frac{k}{N}})_-, L\right] \in \mathcal{A}^-,$$

alors les équations (6) déterminent un nombre infini de champs de vecteurs commutants (voir plus loin) sur $\mathcal{A}^+ + \mathcal{A}^-$.

Nous allons maintenant étudier [1, 13, 10, 11, 12] l'existence d'une seconde structure symplectique. Soit $\widetilde{L} = L + z$ où L est un opérateur différentiel d'ordre n. On a

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \left(\widetilde{L}\nabla H\right)_+\widetilde{L} - \widetilde{L}\left(\nabla H\widetilde{L}\right)_+. \tag{7}$$

Notons que (7) est un champ de vecteurs hamiltonien (généralisant ainsi (4)). En effet, soit

$$J : \mathcal{A}_-/\mathcal{A}_{-\infty,N-1} \to \mathcal{D}_{0,N-1},$$

la fonction définie par

$$J(\zeta) = \left(\widetilde{L}\zeta\right)_+\widetilde{L} - \widetilde{L}\left(\zeta\widetilde{L}\right)_+ = -\left(\widetilde{L}\zeta\right)_-\widetilde{L} + \widetilde{L}\left(\zeta\widetilde{L}\right)_-, \quad \zeta \in \mathcal{A}_-/\mathcal{A}_{-\infty,N-1}.$$

D'où

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \partial_{J(\zeta)}(L) \equiv \left(\widetilde{L}\zeta\right)_+\widetilde{L} - \widetilde{L}\left(\zeta\widetilde{L}\right)_+,$$

ce qui montre qu'il s'agit bien d'un champ de vecteurs sur les opérateurs différentiels L d'ordre n. De même, on a

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = -\left(\widetilde{L}\nabla H\right)_-\widetilde{L} + \widetilde{L}\left(\nabla H\widetilde{L}\right)_-,$$

et la même conclusion reste valable. En outre, on a aussi la relation

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = (L\nabla H)_+ L - L(\nabla HL)_+ + z[\nabla H, L]_+ ,$$

qui montre que ce champ de vecteurs est une interpolation entre (4) pour $z=\infty$ et un nouveau champ de vecteurs pour $z=0$. Considérons la 2-forme différentielle

$$\omega\left(\partial_{J(\zeta)}, \partial_{J(\eta)}\right) = \langle J(\zeta), \eta\rangle = \int \mathrm{Rés}(J(\zeta)\eta)\mathrm{d}x.$$

On montre que cette forme est fermée ($\mathrm{d}\omega = 0$), qu'elle est anti-symétrique ($\langle J(\zeta), \eta\rangle = -\langle \zeta, J(\eta)\rangle$) et qu'en outre $\left[\partial_{J(\zeta)}, \partial_{J(\eta)}\right] = \partial_{J(\xi)}$, où

$$\xi = \left(-\zeta\big(\widetilde{L}\eta\big)_+ + \big(\zeta\widetilde{L}\big)_-\eta\right)_- \left(-\eta\big(\widetilde{L}\zeta\big)_+ + \big(\eta\widetilde{L}\big)_-\zeta\right)_- + \partial_{J(\zeta)}\eta - \partial_{J(\eta)}\zeta.$$

Définition 2.2. L'algèbre des fonctionnelles sur l'espace des opérateurs de la forme (3) pour cette forme symplectique s'appelle algèbre $\mathcal{W}$.

Proposition 2.3. *Les hamiltoniens* $H_k, H_{k+N}, H_{k+2N}, \ldots,$ *définis en* (6) *sont tous en involution pour le crochet* (5).

Démonstration. En effet, soit

$$J = \begin{cases} J_1 & \text{si } z=\infty \\ J_2 & \text{si } z=0, \end{cases}$$

où les crochets de Poisson $\{\cdot,\cdot\}_1$, $\{\cdot,\cdot\}_2$ sont donnés par

$$\{H_j, H_k\}_1 = \int \mathrm{Rés}\left(\nabla H_j J_1(\nabla H_k)\right),$$

et

$$\begin{aligned}\{H_j, H_k\}_2 = \langle \nabla H, J_2(\nabla F)\rangle &= \int \mathrm{Rés}(\nabla H((L\nabla F)_+ L - L(\nabla F L)_+))\mathrm{d}x \\ &= \int \mathrm{Rés}(L\nabla H(L\nabla F)_+ - \nabla H L(\nabla F L)_+)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On déduit de la relation

$$\left(L\big(L^{\frac{r}{n}-1}\big)_-\right)_+ L - L\left(\big(L^{\frac{r}{n}-1}\big)_- L\right)_+ + \left[\big(L^{\frac{r}{n}}\big)_-, L\right]_+ = 0,$$

l'expression

$$\{H_j, H_k\}_1 = \int \mathrm{Rés}\left(\nabla H_j J_2 \nabla H_{k-N}\right).$$

La forme ω étant anti-symétrique, on a donc

$$\begin{aligned}\{H_j, H_k\}_1 &= -\int \text{Rés}\,(\nabla H_{k-N} J_2(\nabla H_j)) = -\int \text{Rés}\,(\nabla H_{k-N} J_1(\nabla H_{j+N})) \\ &= -\int \text{Rés}\,(\nabla H_{j+N} J_1(\nabla H_{k-N})) = \{H_{j+N}, H_{k-N}\}_1 .\end{aligned}$$

Par conséquent, on a $\{H_j, H_k\} = \{H_{j+\alpha N}, H_{k-\alpha N}\}$. Pour α suffisamment grand avec $J_1(\nabla H_{k-\alpha N}) = 0$, i.e., $H_{k-\alpha N}$ est triviale pour α suffisamment grand et on obtient $\{H_j, H_k\} = 0$, donc H_j, H_k sont en involution. □

3. EQUATION DE KDV, ALGÈBRE DE HEISENBERG ET ALGÈBRE DE VIRASORO

PROPOSITION 3.1. *L'opérateur*

$$L = \partial^2 + q,$$

correspondant au cas $N = 2$ avec $q \equiv u_0$, est lié à l'équation de Korteweg-de Vries (KdV) et le crochet de Poisson est fourni dans ce cas par

$$\{q(x), q(y)\}_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x-y).$$

Démonstration. En effet, comme

$$\nabla H(L) = \partial^{-1}\frac{\delta H}{\delta q} + \partial^{-2}\frac{1}{2}\left(\frac{\delta H}{\delta q}\right)',$$

alors les champs de vecteurs appliqués à l'hamiltonien

$$H = \int \left(q^3 - \frac{1}{2}q'^2\right)\mathrm{d}x,$$

fournissent l'équation de Korteweg-de Vries

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}[L, \nabla H]_+ = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\delta H}{\delta q} = \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + 6q\frac{\partial q}{\partial x}. \tag{8}$$

Le crochet (de Poisson) est dans ce cas

$$\{H, F\}_1 = \int \frac{\delta H}{\delta q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\delta F}{\delta q},$$

d'où

$$\{q(x), q(y)\}_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x-y),$$

ce qui achève la démonstration. □

Remarque 3.2. De même, en prenant $N = 3$, $u \equiv u_2$, $v \equiv u_3$,

$$L = \partial^3 + u\partial + v, \quad L^{\frac{2}{3}} = \partial^3 + \frac{2}{3}u,$$

alors le flot (8) prend la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t_2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t_2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{2}{3}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{2}{3}u\frac{\partial u}{\partial x}.$$

En éliminant v de ce système, on obtient l'équation de Boussinesq

$$3\left(\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u^2\right) = 0.$$

PROPOSITION 3.3. *En remplaçant dans la proposition précédente $q(x)$ par la série de Fourier*

$$q(x) = \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\varphi_n + \beta, \quad -\mathrm{i}\alpha^{-2} = 1, \tag{9}$$

où $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ sont de nouvelles coordonnées (coefficients de Fourier), on obtient l'algèbre de Heisenberg et le crochet de Poisson est fourni par

$$\{\varphi_n, \varphi_m\}_1 = n\delta_{m+n,0}.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices (a_{kl}), $k, l \in \mathbb{Z}$, à coefficients complexes et $\mathcal{N}$ la $\mathbb{C}$-algèbre définie par

$$\mathcal{N} = \{(a_{kl}) \in \mathcal{M} : \exists r \text{ tel que } a_{kl} = 0 \text{ pour } |k - l| > r\},$$

i.e., l'ensemble des matrices infinies à support dans une bande autour de la diagonale. Le produit de deux matrices appartenant respectivement à $\mathcal{N}$ et $\mathcal{M}$ se définit de la manière usuelle. Notons que $\mathcal{N}$ est une algèbre de Lie et $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{N}$-module. Leurs extensions $\widetilde{\mathcal{N}}$ et $\widetilde{\mathcal{M}}$ sont définies par

$$0 \to \mathbb{C}c \to \widetilde{\mathcal{N}} \to \mathcal{N} \to 0, \quad 0 \to \mathbb{C}c \to \widetilde{\mathcal{M}} \to \mathcal{M} \to 0,$$

avec $\widetilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N} \oplus \mathbb{C}c$ et $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \oplus \mathbb{C}c$, où c est un élément centrale, i.e.,

$$[c, A] = [c, B] = 0, \quad \forall A \in \widetilde{\mathcal{N}}, \ \forall B \in \widetilde{\mathcal{M}}.$$

On note $e_{i,j} = (\delta_{ki}.\delta_{lj})_{kl}$ les matrices élémentaires, i.e., les matrices dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1. Une matrice de Jacobi n'ayant pas de trace, on considère la matrice $A[J, B]$ où $A \in \mathcal{N}$, $B \in \mathcal{M}$ et J est la matrice définie par

$$J = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \varepsilon(i) e_{i,i},$$

où $\varepsilon(i) = +1$ si $i < 0$ et -1 si $i \geq 0$. Les éléments de la matrice $A[J, B]$ sont nuls à l'exception d'un nombre fini, donc il s'agit bien d'une matrice finie et on peut définir le cocycle de $A \in \mathcal{N}$ et $B \in \mathcal{M}$ à l'aide de la formule

$$\rho(A, B) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A[J, B]) = \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\varepsilon(i) - \varepsilon(j))a_{ij}b_{ji}.$$

Dès lors, le crochet $\widetilde{[,]}$ de $A \in \mathcal{N}$ et $B \in \mathcal{M}$ est définit par

$$\widetilde{[A, B]} = [A + \alpha c, B + \beta c] = [A, B] + \rho(A, B)c.$$

On note que l'algèbre $\widetilde{\mathcal{N}}$ est une extension centrale non triviale de N tandis que la sous-algèbre

$$\widetilde{\mathcal{M}}_f = \mathcal{M}_f \oplus \mathbb{C}c,$$

est une extension centrale triviale de

$$\mathcal{M}_f = \{(a_{ij}) \in \mathcal{M} : (i, j) \mapsto (a_{ij}) \text{ à support fini}\}.$$

Posons

$$E_i = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e_{n,n+i},$$

où $e_{i,i} = (\delta_{ki}.\delta_{ij})_{kl}$ sont les matrices élémentaires définies ci-dessus. Le sous-espace

$$E = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}E_i,$$

est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{N}$. La sous-algèbre de $\mathcal{N}$ définie en posant $\widetilde{E} = E \oplus \mathbb{C}c$ s'appelle sous-algèbre de Heisenberg. On a

$$\widetilde{[E_i, E_j]} = i\delta_{i,-j}c. \tag{10}$$

On reprend maintenant l'exemple précédent et on remplace $q(x)$ par la série de Fourier (9). Soit H une fonctionnelle de q. Sa dérivée de Fréchet en termes des coordonnées φ_k s'écrit

$$\frac{\delta H}{\delta q} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\delta H}{\delta \varphi_k}.\frac{\partial \varphi_k}{\partial q} = \alpha^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\partial H}{\partial \varphi_k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}. \tag{11}$$

On substitue (10) et (11) dans l'équation (8) et on spécifie les coefficients de Fourier; on obtient la relation

$$\alpha\frac{\partial \varphi_n}{\partial t} = -i\alpha^{-1}n\frac{\partial H}{\partial \varphi_n}.$$

Par ailleurs, la structure symplectique étant donnée par la matrice des crochets (de Poisson), on a aussi

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{\varphi_n, \varphi_m\}_1 \frac{\partial H}{\partial \varphi_m}.$$

Dès lors

$$\{\varphi_n, \varphi_m\}_1 = -i\alpha^{-2} n \delta_{m+n,0}.$$

En posant $-i\alpha^{-2} = 1$, on obtient l'algèbre de Heisenberg (où $\{\,,\}$ joue le rôle ici du crochet $\widetilde{[\,,]}$ (2.3) ci-dessus). $\square$

Proposition 3.4. *Dans le cas $N = 2$ (proposition 3.1) on obtient l'algèbre de Virasoro et sa structure est donnée par*

$$\{\varphi_m, \varphi_n\}_2 = (m-n)\varphi_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}.$$

Démonstration. Soit $\mathrm{Diff}(S^1)$ le groupe des difféomorphismes du cercle unité: $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Soit

$$F = \left\{ f(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} : f(z) \in \mathbb{C}\left[z, \frac{1}{z}\right] \right\},$$

l'ensemble des champs de vecteurs (polynômes de Laurent). Notons que F peut-être vu comme étant l'espace tangent $\mathrm{Diff}(S^1)$ en son point unité, donc F est une algèbre de Lie par rapport au crochet $[\,,]$. En posant

$$\varphi_m = -z^{m+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
[\varphi_m, \varphi_n] &= \left((n+1)z^{m+n+1} - (m+1)^{m+n+1}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \\
&= -(m+n)z^{m+n+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} = (m-n)\varphi_{m+n}.
\end{aligned}$$

On montre que $H^2(F, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ et

$$\rho(\varphi_m, \varphi_n) = \frac{1}{12}(m^3 - m)\delta_{m,-n}.$$

L'espace vectoriel $F \oplus \mathbb{C}c$ s'appelle algèbre de Virasoro, c'est une extension centrale de l'algèbre des champs de vecteurs complexes du cercle. Le crochet est donné par la formule

$$[\varphi_m, \varphi_n] = (m-n)\varphi_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m,-n}. \tag{12}$$

Reprenons maintenant l'exemple de l'équation de K-dV. On a $N = 2$ et

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = (L\nabla H)_+ - L(\nabla H L)_+ = \left(\partial^3 + 2(\partial q + q\partial)\right)\frac{\delta H}{\delta q}.$$

Le crochet (de Poisson) s'écrit dans ce cas

$$\{H,F\}_2 = \int \frac{\delta H}{\delta q}\left(\partial^3 + 2(\partial q + q\partial)\right)\frac{\delta F}{\delta q},$$

et on a

$$\{q(x),q(y)\}_2 = \left(\partial^3 + 2(\partial q + q\partial)\right)\delta(x-y).$$

En utilisant un raisonnement similaire à celui fait dans la proposition précédente, on obtient

$$\alpha\frac{\partial\varphi_m}{\partial t} = i\sum_n (n-m)\varphi_{m+n}\frac{\delta H}{\delta\varphi_n} + \frac{i}{2\alpha}(m^3 - 4\beta m)\frac{\delta H}{\delta\varphi_{-m}},$$

où $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ sont les coefficients de Fourier de q. En posant $4\beta = 1$, $\alpha = \frac{6i}{c}$ et en tenant compte de la série de Fourier (10), on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\vdots\\ \varphi_m\\ \vdots\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} & -m^{\text{ème}}\text{ colonne} & & n^{\text{ème}}\text{ colonne}\\ & \downarrow & & \downarrow\\ m^{\text{ème}}\text{ ligne}\ \rightarrow & \frac{c}{12}(m^3-m) & \dots & (m-n)\varphi_{m+n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vdots\\ \frac{\delta H}{\delta\varphi_m}\\ \vdots\end{pmatrix},$$

et par conséquent

$$\{\varphi_m,\varphi_n\}_2 = (m-n)\varphi_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0},$$

i.e., la structure de Virasoro [14] (où $\{\,,\}_2$ joue le rôle ici du crochet $[\,,]$ (12) ci-dessus). $\square$

4. HIÉRARCHIE KP, FONCTIONS $\tau(t)$, IDENTITÉS DE FAY, OPÉRATEUR VERTEX ET ÉQUATIONS BILINÉAIRES D'HIROTA.

Considérons l'opérateur pseudo-différentiel d'ordre infini

$$L = \partial + u_1\partial^{-1} + u_2\partial^{-2} + \cdots, \quad \partial \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \tag{13}$$

où $u_1, u_2, \ldots$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dépendant d'une infinité de variables indépendantes $x \equiv t_1, t_2, \ldots$. L'opérateur composé L^n se calcule selon les règles (1) et (2). On obtient

$$\begin{aligned} L^n &= \partial^n + p_{n,2}\partial^{n-2} + \cdots + p_{n,n} + p_{n,n+1}\partial^{-1} + \cdots \\ &= \partial^n + \sum_{j=2}^{n} p_{n,j}\partial^{n-j} + \sum_{j=1}^{\infty} p_{n,n+j}\partial^{-j}, \end{aligned}$$

où les $p_{n,j}$ sont des polynômes en les u_j et leurs dérivées par rapport à x. La partie différentielle L_+^n de L^n étant égale à

$$L_+^n = \partial^n + \sum_{j=2}^{n} p_{n,j}\partial^{n-j},$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} L_+^1 &= \partial, \\ L_+^2 &= \partial^2 + 2u_2, \\ L_+^3 &= \partial^3 + 3u_2\partial + 3(u_3 + \partial u_2), \\ &\vdots \end{aligned} \tag{14}$$

La dépendance entre les fonctions $u_1, u_2, \ldots$ et les variables $x = t_1, t_2, \ldots$ est fournie par le système d'équations aux dérivées partielles suivant:

$$\frac{\partial L}{\partial t_n} = [L_+^n, L], \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{15}$$

L'ensemble de ces équations s'appelle hiérarchie de Kadomtsev-Petviashvili (en abrégé: hiérarchie KP). C'est une hiérarchie de déformations isospectrales de l'opérateur pseudo-différentiel (13). On démontre [9] le résultat suivant:

PROPOSITION 4.1. *Il y'a une équivalence entre* (15) *et les équations*

$$\frac{\partial}{\partial t_n} L_+^m - \frac{\partial}{\partial t_m} L_+^n = [L_+^n, L_+^m], \tag{16}$$

ainsi qu'à leurs formes duales

$$\frac{\partial}{\partial t_n} L_-^m - \frac{\partial}{\partial t_m} L_-^n = -[L_-^n, L_-^m], \tag{17}$$

où $L_-^n = L^n - L_+^n$. Les équations (15) *déterminent un nombre infini de champs de vecteurs commutants sur l'algèbre $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \oplus \mathcal{A}_-$.*

Démonstration. Notons que puisque $L^n = L_+^n + L_-^n$, alors

$$\frac{\partial L}{\partial t_n} = [L_+^n, L] = -[L_-^n, L] \in \mathcal{A}_-,$$

l'équation (15) défini un nombre infini de champs de vecteurs sur $\mathcal{A}$. Comme $\frac{\partial}{\partial t_n}$ et $[L_+^n, \cdot]$ sont des dérivations, alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial L^m}{\partial t_n} &= [L_+^n, L_+^m] + [L_+^n, L_-^m] = -[L_-^n, L_+^m] - [L_-^n, L_-^m] \\ &= \frac{1}{2}\left([L_+^n, L_+^m] - [L_-^n, L_+^m]\right) + \frac{1}{2}\left(-[L_-^n, L_-^m] + [L_+^n, L_-^m]\right) \\ &= \frac{1}{2}\left([L_+^n, L_+^m] - [L_-^n, L_-^m]\right) + \frac{1}{2}\left([L_+^m, L_-^n] - [L_-^m, L_+^n]\right).\end{aligned}$$

De même, on a (il suffit d'échanger n et m)

$$\frac{\partial L^n}{\partial t_m} = \frac{1}{2}\left([L_+^m, L_+^n] - [L_-^m, L_-^n]\right) + \frac{1}{2}\left([L_+^n, L_-^m] - [L_-^n, L_+^m]\right).$$

D'où

$$\frac{\partial L^m}{\partial t_n} - \frac{\partial L^n}{\partial t_m} = [L_+^n, L_+^m] - [L_-^n, L_-^m].$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{\partial L^m}{\partial t_n} - \frac{\partial L^n}{\partial t_m} &= \frac{\partial}{\partial t_n}L_+^m + \frac{\partial}{\partial t_n}L_-^m - \frac{\partial}{\partial t_m}L_+^n - \frac{\partial}{\partial t_m}L_-^n \\ &= \frac{\partial}{\partial t_n}L_+^m - \frac{\partial}{\partial t_m}L_+^n + \frac{\partial}{\partial t_n}L_-^m - \frac{\partial}{\partial t_m}L_-^n,\end{aligned}$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial t_n}L_+^m - \frac{\partial}{\partial t_m}L_+^n - [L_+^n, L_+^m] = -\frac{\partial}{\partial t_n}L_-^m + \frac{\partial}{\partial t_m}L_-^n - [L_-^n, L_-^m].$$

Puisque l'expression à gauche appartient à $\mathcal{A}_+$ et celle à droite appartient à $\mathcal{A}_-$, alors le résultat découle de la décomposition $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \oplus \mathcal{A}_-$ puisque évidemment $\mathcal{A}_+ \cap \mathcal{A}_- = \emptyset$. Pour montrer que les champs de vecteurs définis par ces équations commutent, on pose $X(L) = [L_+^m, L]$ et $Y(L) = [L_+^n, L]$. D'où

$$\begin{aligned}[X, Y](L) &= (XY - YX)(L) = X\left([L_+^n, L]\right) - Y\left([L_+^m, L]\right) \\ &= \left[X(L_+^n) - Y(L_+^m), L\right] + \left[L_+^n, X(L)\right] - \left[L_+^m, Y(L)\right] \\ &= \left[X(L_+^n) - Y(L_+^m), L\right] + \left[L_+^n, [L_+^m, L]\right] - \left[L_+^m, [L_+^n, L]\right] \\ &= \left[X(L_+^n) - Y(L_+^m) - [L_+^m, L_+^n], L\right]\end{aligned}$$

en vertu de l'identité de Jacobi et d'après (16), on en déduit que les champs de vecteurs en question commutent. □

En spécifiant les quantificateurs de ∂^k dans (16), on obtient une infinité d'équations aux dérivées partielles non-linéaires [8] formant l'hiérarchie de Kadomtsev-Petviashvili. Ces équations relient une infinité de fonctions u_j en une infinité de variables t_j. Par exemple, pour $m = 2$, $n = 3$, les relations (16) et (14) déterminent deux expressions en fonction de u_2 et u_3. Après avoir éliminé u_3, on obtient immédiatement l'équation non-linéaire de Kadomtsev-Petviashvili (équation KP):

$$3\frac{\partial^2 u_2}{\partial t_2^2} - \frac{\partial}{\partial t_1}\left(4\frac{\partial u_2}{\partial t_3} - 12u_2\frac{\partial u_2}{\partial t_1} - \frac{\partial^3 u_2}{\partial t_1^3}\right) = 0. \tag{18}$$

On peut obtenir évidemment des solutions particulières de cette équation en résolvant le système

$$\frac{\partial u_2}{\partial t_2} = 0, \quad 4\frac{\partial u_2}{\partial t_3} - 12u_2\frac{\partial u_2}{\partial t_1} - \frac{\partial^3 u_2}{\partial t_1^3} = 0.$$

Notons que cette dernière équation n'est autre que l'équation de Korteweg-de Vries (équation K-dV). L'équation KP est donc une généralisation de l'équation K-dV, à laquelle elle se réduit lorsque $\frac{\partial u_2}{\partial t_2} = 0$.

Les équations (15) et (16) impliquent l'existence de l'opérateur pseudo-différentiel de degré 0 (opérateur des ondes) $W \in \mathcal{I} + \mathcal{A}_-$ suivant:

$$W = 1 + w_1(t)\partial^{-1} + w_2(t)\partial^{-2} + \cdots, \tag{19}$$

avec $t = (t_1, t_2, \ldots) \in \mathbb{C}^\infty$. L'inverse W^{-1} de W est aussi un opérateur pseudo-différentiel de la forme

$$W^{-1} = 1 + v_1(t)\partial^{-1} + v_2(t)\partial^{-2} + \cdots,$$

et peut se calculer terme à terme. En effet, par définition, on a $WW^{-1} = 1$. Dès lors, en utilisant le fait que

$$\partial^m u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m!}{k!(m-k)!}(\partial^k u \partial^u)\partial^{m-k}u, \quad \partial^m\partial^n = \partial^{m+n},$$

ainsi que les formules décrites dans l'exemple 2.1, on spécifie les quantificateurs de $\partial^{-1}, \partial^{-2}, \ldots$ dans l'équation $WW^{-1} = 1$ et on détermine des relations entre w_m et v_m. On obtient finalement pour W^{-1} l'expression suivante:

$$W^{-1} = 1 - w_1\partial^{-1} + (-w_2 + w_1^2)\partial^{-2} + (w_3 + 2w_1w_2 - w_1\partial w_1 - w_1^3)\partial^{-3} + \cdots$$

En terme de W, l'opérateur L (13) peut s'écrire sous la forme

$$L = W.\partial.W^{-1}. \tag{20}$$

D'après (13) et (19), on tire les relations

$$u_2 = \partial w_2, \quad u_3 = -\partial w_2 - w_1\partial w_1,$$
$$u_4 = -\partial w_3 + w_1\partial w_2 + (\partial w_1)w_2 - w_1^2\partial w_1 - (\partial w_1)^2.$$

On a le résultat suivant:

Proposition 4.2. *Les équations* (15) *ou ce qui revient au même* (*d'après la proposition* 3.1) *les équations* (16) *sont équivalentes à l'existence de l'opérateur des ondes W* (19) *tel que le système d'équations différentiels*

$$LW = W\partial, \tag{21}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t_n} = -L_-^n W, \tag{22}$$

possède une solution (*que l'on peut obtenir de manière inductive*).

Soit

$$\xi(t,z) = \sum_{j=1}^{\infty} t_j z^j, \quad z \in \mathbb{C}$$

la fonction de phase avec

$$\partial^m \xi(t,z) = z^m, \quad \partial^m e^{\xi(t,z)} = z^m e^{\xi(t,z)}.$$

Proposition 4.3. *Il y'a une équivalence entre* (18), (22) *et le problème suivant: Il existe une fonction d'onde ψ* (*fonction de Baker-Akhiezer*)

$$\Psi(t,z) = \left(1 + w_1(t)z^{-1} + w_2(t)z^{-2} + \cdots\right) e^{\xi(t,z)}, \quad z \in \mathbb{C} = We^{\xi(t,z)}, \tag{23}$$

où W est identifiée en tant que (19) *et telle que:*

$$L\Psi = z\Psi, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t_n} = L_+^n \Psi. \tag{24}$$

Démonstration. En effet, on a d'après (23),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial t_n} &= \frac{\partial W}{\partial t_n} e^{\xi(t,z)} + W z^n e^{\xi(t,z)} \\
&= -L_-^n W e^{\xi(t,z)} + z^n W e^{\xi(t,z)}, \text{ d'après (20)} \\
&= -L_-^n \Psi + z^n \Psi, \text{ d'après (21)} \\
&= -L_-^n \Psi + L^n \Psi, \text{ d'après (22)} = L_+^n \Psi.
\end{aligned}$$

Autrement dit, dire que Ψ satisfait à (23) et (24) est équivalent de dire que W satisfait à (19) et (22). $\square$

Introduisons la conjugaison $\partial^* = -\partial$ et soient

$$\begin{aligned}
L^* &= 1 + (-\partial)^{-1} u_1 + (-\partial)^{-2} u_2 + \cdots, \\
W^* &= 1 + (-\partial)^{-1} w_1 + (-\partial)^{-2} w_2 + \cdots,
\end{aligned}$$

les adjoints de L et W tels que:

$$L^* = -(W^*)^{-1}.\partial.W^*.$$

Proposition 4.4. *La fonction d'onde adjointe*

$$\Psi^*(t,z) = (W^*(t,\partial))^{-1}\, e^{-\xi(t,z)},$$

satisfait aux relations

$$L^*\Psi^* = z\Psi^*, \quad \frac{\partial \Psi^*}{\partial t_n} = -(L_+^n)^*\Psi^*,$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser un raisonnement similaire à celui de la proposition précédente. □

Dès lors, la connaissance de Ψ implique celle de W et donc celle de W^* et de L.

Définissons les résidus suivants:

$$\underset{z}{\text{Rés}} \sum a_k z^k = a_{-1}, \quad \underset{\partial}{\text{Rés}} \sum a_k \partial^k = a_{-1},$$

et considérons le lemme [12] suivant, simple mais très utile.

Lemme 4.5. *Soient P et Q deux opérateurs pseudo-différentiels. Alors*

$$\underset{z}{\text{Rés}}((Pe^{xz}).(Qe^{-xz})) = \underset{\partial}{\text{Rés}}\ PQ^*,$$

où Q^* est l'adjoint de Q.

Démonstration. En effet, on a

$$\underset{z}{\text{Rés}}((Pe^{xz}).(Qe^{-xz})) = \underset{z}{\text{Rés}}\left(\sum p_k z^k \sum q_l(-z)^l\right) = \sum_{k+l=-1} (-1)^l p_k q_l,$$

et

$$\underset{\partial}{\text{Rés}}\ PQ^* = \underset{\partial}{\text{Rés}} \sum_{kl} p_k \partial^k (-\partial)^l q_l = \sum_{k+l=-1} (-1)^l p_k q_l,$$

d'où le résultat. □

Par ailleurs, on a [9, 12]:

$$\begin{aligned}\underset{z}{\text{Rés}}\ (\partial^k\Psi).\Psi^* &= \underset{z}{\text{Rés}}\big(\partial^k W e^{\xi(t,z)}\big)(W^*)^{-1}e^{-\xi(t,z)} = \underset{z}{\text{Rés}}\big(\partial^k W e^{xz}\big)(W^*)^{-1}e^{-xz}\\ &= \underset{\partial}{\text{Rés}}\ \partial^k W.W^{-1} = \underset{\partial}{\text{Rés}}\ \partial^k = 0, \quad x \equiv t-1.\end{aligned}$$

Cette identité bilinéaire peut s'écrire sous la forme symbolique suivante:

$$\underset{z=\infty}{\text{Rés}}\big(\Psi(t,z).\Psi^*(t',z)\big) = 0 \quad \forall t, t'.$$

Par conséquent on a

Proposition 4.6. *$\Psi(t,z)$ est une fonction d'onde pour la hiérarchie KP si et seulement si l'identité des résidus est satisfaite:*

$$\underset{z=\infty}{\text{Rés}}\big(\Psi(t,z).\Psi^*(t',z)\big) = 0 \quad \forall t, t' \tag{25}$$

ou ce qui revient au même si et seulement si

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_\gamma \Psi(t,z).\Psi^*(t',z)\mathrm{d}z = 0, \tag{26}$$

avec γ *un chemin fermé autour de* $z=\infty$ (*tel que* $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{2\pi\sqrt{-1}} = 1$).

Définition 4.7. Une fonction $\tau(t)$ est définie par l'identité différentielle de Fay (voir proposition suivante):

$$\{\tau(t-[y_1]),\tau(t-[y_2])\}+(y_1^{-1}-y_2^{-1})(\tau(t-[y_1])\tau(t-[y_2])-\tau(t)\tau(t-[y_1]-[y_2]))=0,$$

où $y_1, y_2 \in \mathbb{C}^*$ et $\{u,v\}$ désigne ici le wronskien $u'v-uv'$.

Proposition 4.8. *Posons* $[s] = \left(s, \frac{s^2}{2}, \frac{s^3}{3}, \dots\right)$. *La fonction* τ *satisfait aux identités suivantes:*

(i) *Identité de Fay:*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(t,y_0,y_1,y_2,y_3) \equiv (y_0-y_1)(y_2-y_3)\tau(t+[y_0]+[y_1])\tau(t+[y_2]+[y_3])+\\ +(y_0-y_2)(y_3-y_1)\tau(t+[y_0]+[y_2])\tau(t+[y_2]+[y_1])+\\ +(y_0-y_3)(y_1-y_2)\tau(t+[y_0]+[y_3])\tau(t+[y_1]+[y_2])=0.\end{aligned}$$

(ii) *Identité différentielle de Fay:*

$$\left\{\tau(t-[y_1]),\tau(t-[y_2])\right\}+(y_1^{-1}-y_2^{-1})(\tau(t-[y_1])\tau(t-[y_2])-\tau(t)\tau(t-[y_1]-[y_2]))=0,$$

où $y_1, y_2 \in \mathbb{C}^*$ *et* $\{u,v\}$ *désigne ici le wronskien* $u'v-uv'$. *Cette identité peut encore s'écrire sous la forme*

$$\partial^{-1}\psi(t,\lambda)\psi^*(t,\mu) = \frac{1}{\mu-\lambda}\frac{\tau\left(t-[\lambda^{-1}]+[\mu^{-1}]\right)}{\tau(t)}\, e^{\sum_{j=1}^\infty t_j(\mu^j-\lambda^j)}.$$

L'équation

$$\dot{\tau} = X(t,\lambda,\mu)\tau,$$

détermine un champ de vecteurs sur la variété de dimension infinie des fonctions τ *où* $X(t,\lambda,\mu)$ *est l'opérateur vertex* (*de Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa*) *pour l'équation KP.*

Démonstration. Selon la théorie de Sato [23, 24], les fonctions Ψ et Ψ^* peuvent s'exprimer en termes d'une fonction tau τ comme suit:

$$\Psi(t,z) = We^{\xi(t,z)} = \frac{\tau(t-[z^{-1}])}{\tau(t)}\, e^{\xi(t,z)},$$

$$\Psi^*(t,z) = (W^*)^{-1}\, e^{-\xi(t,z)} = \frac{\tau(t+[z^{-1}])}{\tau(t)}\, e^{-\xi(t,z)}.$$

En remplaçant ces expressions dans la formule des résidus (25) ou (26), on obtient une relation bilinéaire pour les fonctions τ. En effet, l'équation (26) s'écrit

$$\int_\gamma e^{\xi(t-t',z)}\tau(t-[z^{-1}])\tau(t'-[z^{-1}])\mathrm{d}z = 0.$$

En utilisant le changement suivant: $t \leftarrow t+s$ et $t' \leftarrow t+s$, on obtient

$$\int_\gamma e^{\xi(-2s,z)}\tau(t-s-[z^{-1}])\tau(t+s+[z^{-1}])\mathrm{d}z = 0.$$

En utilisant à nouveau la transformation: $s \leftarrow t+\frac{1}{2}([y_0]+[y_1]+[y_2]+[y_3])$, $t \leftarrow \frac{1}{2}([y_0]-[y_1]-[y_2]-[y_3])$ et en tenant compte du fait que:

$$e^{\sum_1^\infty (ab^{-1})^j.j^{-1}} = 1-ab^{-1},$$

on obtient via le théorème des résidus

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\gamma \frac{1-zy_0}{\prod_{j=1}^3(1-zy_j)}\tau(t-s-[z^{-1}])\tau(t+s+[z^{-1}])\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\sqrt{-1}\sum \underset{y_1^{-1},y_2^{-1},y_3^{-1}}{\text{Rés}} \left(\frac{1-zy_0}{\prod_{j=1}^3(1-zy_j)}\tau(t-s-[z^{-1}])\tau(t+s+[z^{-1}])\right) \\
&= \frac{2\pi\sqrt{-1}}{(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)}\,\mathcal{F}(t,y_0,y_1,y_2,y_3),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(t,y_0,y_1,y_2,y_3) \equiv{}& (y_0-y_1)(y_2-y_3)\tau(t+[y_0]+[y_1])\tau(t+[y_2]+[y_3])+ \\
&+(y_0-y_2)(y_3-y_1)\tau(t+[y_0]+[y_2])\tau(t+[y_2]+[y_1])+ \\
&+(y_0-y_3)(y_1-y_2)\tau(t+[y_0]+[y_3])\tau(t+[y_1]+[y_2]).
\end{aligned}$$

La relation $\mathcal{F}(t,y_0,y_1,y_2,y_3)=0$ est l'identité de Fay. En outre, en faisant la transformation dans l'expression $(y_1y_2)^{-1}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y_0}|_{y_0=y_3=0}$ et en remplaçant t par $t-[y_1]-[y_2]$, on obtient l'identité différentielle de Fay qui permet de définir les fonctions τ:

$$\begin{gathered}
\{\tau(t-[y_1]),\tau(t-[y_2])\}+ \\
+(y_1^{-1}-y_2^{-1})\left(\tau(t-[y_1])\tau(t-[y_2])-\tau(t)\tau(t-[y_1]-[y_2])\right)=0,
\end{gathered}$$

où $y_1,y_2\in\mathbb{C}^*$ et $\{u,v\}$ désigne ici le wronskien $u'v-uv'$. Reprenons l'identité différentielle de Fay ci-dessus et remplaçons t par $t+[y_1]$. On obtient

$$\left\{\tau(t),\tau(t+[y_1]-[y_2])\right\}+(y_1^{-1}-y_2^{-1})\left(\tau(t)\tau(t+[y_1]-[y_2])-\tau(t)\tau(t-[y_2])\right)=0.$$

En posant $\lambda = y_1^{-1}$, $\mu = y_2^{-1}$, on obtient après avoir multiplié l'expression obtenue par $\frac{1}{\tau(t)}\, e^{\sum_1^\infty t_j(\mu^j-\lambda^j)}$, la formule suivante:

$$\begin{aligned}&\frac{\tau(t+[\lambda^{-1}])}{\tau(t)}\, e^{-\sum t_j\lambda^j}\, \frac{\tau(t-[\mu^{-1}])}{\tau(t)}\, e^{\sum t_j\mu^j} = \\ &= \frac{1}{\mu-\lambda}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\sum t_j(\mu^j-\lambda^j)}\,\frac{\tau(t+[\lambda^{-1}]-[\mu^{-1}])}{\tau(t)}\right).\end{aligned}$$

Soit

$$X(t,\lambda,\mu) = \frac{1}{\mu-\lambda}\, e^{\sum_1^\infty t_j(\mu^j-\lambda^j)} e^{\sum_1^\infty j^{-1}(\lambda^{-j}-\mu^{-j})\frac{\partial}{\partial t_j}}, \quad \lambda\neq\mu,$$

l'opérateur vertex (de Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa) pour l'équation KP, alors $X(t,\lambda,\mu)\tau$ et $\tau + X(t,\lambda,\mu)\tau$ sont aussi des fonctions τ. Par conséquent, $\dot\tau = X(t,\lambda,\mu)\tau$ détermine un champ de vecteurs sur la variété de dimension infinie des fonctions τ. On en déduit, selon [4], que

$$\partial^{-1}\left(\Psi^*(t,\lambda)\Psi(t,\mu)\right) = \frac{1}{\tau(t)} X(t,\lambda,\mu)\tau(t),$$

et la démonstration est complète. $\square$

Remarque 4.9. Soit

$$\Delta(s_1,\dots,s_n) = \prod_{1\le j<i\le n}\left(s_i^{-1}-s_j^{-1}\right),$$

le déterminant de Vandermonde. Les identités de Fay (proposition 4.8) se généralisent comme suit. La fonction τ satisfait aux identités:

$$\begin{aligned}&\tau\Big(t-\sum_{j=1}^n [y_j]\Big)\Delta(y_1,\dots,y_n)\left(\Big(t-\sum_{j=1}^n [y_j]\Big)\Delta(x_1,\dots,x_n)\right)^{n-1} = \\ &= \det\left(\Big(t-\sum_{j=1}^n [x_k]+[x_j]-[y_l]\Big)\Delta(x_1,\dots,x_{j+1},y_j,x_{j+1},\dots,x_n)\right)_{1\le j,l\le n},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\{\psi(t,y_1^{-1},\dots,\psi(t,y_n^{-1}\} = \\ &= e^{\sum_{j=1}^\infty t_j(y_1^{-j}+\cdots+y_n^{-j})}\frac{\tau(t-[y_l]-\cdots-[y_n]}{\tau(t)}\Delta(y_1,\dots,y_n),\end{aligned}$$

où $\{u_1,\dots,u_n\}$ désigne le wronskien $\det\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{j-1}u_j\right)_{1\le i,j\le n}$.

Nous allons voir que les fonctions τ caractérisent la hiérarchie KP. Désignons par $s_j(t)$ les polynômes de Schur élémentaires, i.e., des polynômes tels que

$$\begin{aligned} e^{\xi(t,z)} = e^{\sum_{j=1}^{\infty} t_j z_j} &= \sum_{j=1}^{\infty} s_j(t) z_j \\ &= 1 + t_1 z + \left(\frac{1}{2}t_1^2 + t_2\right) z^2 + \left(\frac{1}{6}t_1^3 + t_1 t_2 + t_3\right) z^3 + \cdots , \end{aligned}$$

avec $s_j(t) = \frac{t_1^j}{j!} + \cdots + t_n$. En posant $\widetilde{\partial} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t_2}, \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t_3}, \ldots\right)$, on obtient

$$\begin{aligned} \Psi(t,z) &= \frac{\tau\left(t_1 - z^{-1}, t_2 - \frac{z^{-2}}{2}, t_3 - \frac{z^{-3}}{3}, \ldots\right)}{\tau(t)} e^{\xi(t,z)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{s_j(-\widetilde{\partial})\tau(t)}{\tau(t)} \partial^{-j} e^{\xi(t,z)} = W(t) e^{\xi(t,z)}, \end{aligned}$$

où

$$W(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{s_j(-\widetilde{\partial})\tau(t)}{\tau(t)} \partial^{-j}, \tag{27}$$

est l'opérateur des ondes (19). De même, on a

$$W^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \partial^{-j} \frac{s_j(\widetilde{\partial})\tau(t)}{\tau(t)}.$$

En outre, il résulte de (20) que $L^n = W.\partial^n.W^{-1}$ et par conséquent L^n s'exprime en termes de la fonction τ,

$$L^n = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{s_i(-\widetilde{\partial})\tau}{\tau} \partial^{n-i-j} \frac{s_j(\widetilde{\partial})}{\tau} \tau.$$

En développant cette expression, on obtient

$$L^n = \partial^n + n(\log \tau)'' \partial^{n-2} + \cdots + \sum_{i+j=n+1} \frac{s_i(\widetilde{\partial})\tau s_j(-\widetilde{\partial})\tau}{\tau^2} + \cdots .$$

La formule (22) s'écrit en tenant compte de cette dernière expression de L^n et de la relation (27) comme suit:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t_n}\left(1 - \frac{\tau'}{\tau}\partial^{-1} + \cdots\right) = \\ = \left(-\sum_{i+j=n+1} \frac{s_i(-\widetilde{\partial})\tau s_j(-\widetilde{\partial})\tau}{\tau^2} \partial^{-1} + \cdots\right)\left(1 - \frac{\tau'}{\tau}\partial^{-1} + \cdots\right). \end{gathered}$$

En utilisant le symbole d'Hirota, i.e.,

$$p(\partial_t)f(t).g(t) \equiv p\left(\frac{\partial}{\partial s_1}, \frac{\partial}{\partial s_2}, \dots\right) f(t+s)g(t-s)\Big|_{s=0},$$

où p est un polynôme quelconque, $f(t)$ et $g(t)$ sont deux fonctions différentiables, on obtient

$$\sum_{\substack{i+j=n+1\\ i,j\geq 0}} \big(s_i(\widetilde{\partial})\tau\big)\big(s_j(-\widetilde{\partial})\tau\big) = s_{n+1}(\widetilde{\partial})\tau.\tau,$$

et

$$\tau^2 \frac{\partial^2}{\partial t_n \partial t_1}\log\tau - \sum_{\substack{i+j=n+1\\ i,j\geq 0}} s_i(\widetilde{\partial})\tau s_j(-\widetilde{\partial})\tau = 0, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Ces relations s'appellent équations bilinéaires d'Hirota. Elles montrent que toutes les fonctions $u_j(t)$, $j \geq 2$, peuvent s'exprimer en termes de la fonction τ. Par exemple,

$$\begin{aligned}
u_2 &= \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\log\tau,\\
u_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3}{\partial t_1^3} + \frac{\partial}{\partial t_1}\frac{\partial}{\partial t_3}\right)\log\tau,\\
u_4 &= \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^4}{\partial t_1^4} - 3\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\frac{\partial}{\partial t_2} + 2\frac{\partial}{\partial t_1}\frac{\partial}{\partial t_2}\right)\log\tau - \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\log\tau\right),\\
&\vdots
\end{aligned}$$

En particulier, ces équations fournissent l'équation KP sous la forme bilinéaire suivante:

$$\frac{1}{12}\tau\left(\frac{\partial^4\tau}{\partial t_1^4} - 4\frac{\partial^2\tau}{\partial t_1\partial t_3} + 3\frac{\partial^2\tau}{\partial t_2^2}\right) - \frac{1}{3}\frac{\partial\tau}{\partial t_1}\left(\frac{\partial^3\tau}{\partial t_1^3} - \frac{\partial\tau}{\partial t_3}\right) + \\ + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial t_1^2} + \frac{\partial\tau}{\partial t_2}\right)\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial t_1^2} - \frac{\partial\tau}{\partial t_2}\right) = 0.$$

Par conséquent, on a

PROPOSITION 4.10. *Les fonctions τ caractérisent la hiérarchie KP.*

Signalons enfin que les équations de la théorie des solitons jouent un rôle important dans la caractérisation des variétés jacobiennes. Soient

$$\mathcal{H}_g = \{Z \in M_g(\mathbb{C}) : \Omega = \Omega^\top,\ \operatorname{Im}\Omega > 0\},$$

le demi-espace de Siegel, $\Lambda = \mathbb{Z}^g \oplus Z\mathbb{Z}^g$ un réseau dans $\mathbb{C}^g$ et $T = \mathbb{C}^g/\Lambda$ une variété abélienne principalement polarisée. On montre [25, 6], que les trois conditions suivantes sont équivalentes:

(i) Il existe des champs de vecteurs v_1, v_2, v_3 sur $\mathbb{C}^g$ et une forme quadratique

$$q(t) = \sum_{k,l=1}^{3} q_{kl}(t) t_k t_l,$$

tels que: pour tout $z \in \mathbb{C}^g$, la fonction

$$\tau(t) = e^{q(t)} \theta \left(\sum_{k=1}^{3} t_k v_k + z \right),$$

satisfait à l'équation KP. Le diviseur thêta ne contient pas une sous-variété abélienne de T pour laquelle le vecteur v_1 est tangent.

(ii) T est isomorphe à la variété jacobienne d'une courbe complète non-singulière réduite de genre g.

(iii) Il existe une matrice $\mathcal{V} = (v_1, v_2, \ldots)$ d'ordre $g \times \infty$, $v_k \in \mathbb{C}^g$, de rang g et une forme quadratique

$$Q(t) = \sum_{k,l=1}^{\infty} q_{kl}(t) t_k t_l,$$

telles que: pour tout $z \in \mathbb{C}^g$,

$$\widetilde{\tau}(t) = e^{Q(t)} \theta \left(\mathcal{V} t + z \right),$$

est une fonction τ pour la hiérarchie KP.

5. APPENDICE: ORBITES COADJOINTES DANS DES ALGÈBRES DE KAC-MOODY ET LE THÈOREME D'ADLER-KOSTANT-SYMES

Afin de ne pas alourdir l'exposé, nous renvoyons à [5] pour les différentes notions liées aux représentations adjointes et coadjointes d'un groupe de Lie. Ainsi que les orbites adjointes et orbites coadjointes (ou orbites de Kostant-Kirillov). On y trouvera aussi plusieurs informations liées aux systèmes hamiltoniens intégrables et des résultats précis obtenus pour une classe intéressante d'orbites que ce soit dans le cas d'algèbres de Lie de dimension finie ou infinie.

Le théorème d'Adler-Kostant-Symes [1, 2, 5, 18] ci-dessous, donne une construction de grandes familles de fonctions en involution basée sur des décompositions d'algèbres de Lie. Ce théorème fournit des systèmes intégrables comme déformations isospectrales sur des orbites coadjointes dans des algèbres de Kac-Moody (extensions formelles de dimensions infinies d'algèbres de Lie semi-simples). Ces systèmes ont suffisamment d'intégrales premières en involution. Appliqué à des algèbres de dimension finie, ce théorème fournit des systèmes hamiltoniens à surfaces invariantes non-compactes tandis que la dimension infinie fournit des systèmes compacts.

THÈOREME 5.1. *Soit $\mathcal{L} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{N}$ une algèbre de Lie, somme directe de deux sous algèbres $\mathcal{K}$ et $\mathcal{N}$, munie d'une forme bilinéaire non-dégénérée Ad-invariante $\langle\ ,\ \rangle$. Soient $\mathcal{K}^\perp$ et $\mathcal{N}^\perp$ l'orthogonal de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{N}$ respectivement. Alors, la projection $\mathcal{L} \to \mathcal{K}^\perp$ munit $\mathcal{K}^\perp$ de la structure coadjointe pour $\mathcal{N}$. En outre, on a*

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^* = \mathcal{K}^\perp \oplus \mathcal{N}^\perp,$$

et $\mathcal{K}^\perp = \mathcal{N}^*$ (dual de $\mathcal{N}$) est munie avec $\mathcal{N}$ d'une forme induite héritant de la structure de Kostant-Kirillov. Soit $V \subset \mathcal{N}^*$ une variété invariante sous l'action coadjointe de $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{N}^*$ et notons $\mathcal{A}(V)$ l'algèbre des fonctions définies sur un voisinage de V, invariante sous l'action coadjointe de $\mathcal{L}$ (ce qui est distinct de l'action de $\mathcal{N} - \mathcal{N}^*$). Alors les fonctions H dans $\mathcal{A}(V)$ mènent à des champs de vecteurs commutants et ayant la forme de Lax suivante:

$$\dot{a} = [a, pr_{\mathcal{K}}(\nabla H)]\,,$$

où $pr_{\mathcal{K}}$ désigne la projection sur $\mathcal{K}$.

Démonstration. Rappelons que le gradient ∇H d'une fonction H sur un espace vectoriel E est défini par

$$\mathrm{d}H = (\nabla H, \mathrm{d}v)_V\,,$$

où $v \in E$, $\nabla H \in E^*$ (dual de E) et $(\cdot\,,\cdot)_V$ la forme entre E, E^*. Soit $H \in \mathcal{L}^* \approx \mathcal{L}$. Notons que

$$\nabla_{\mathcal{K}^\perp} H = pr_{\mathcal{N}}(\nabla H), \quad \nabla_{\mathcal{N}^\perp} H = pr_{\mathcal{K}}(\nabla H).$$

Soit $V \subset \mathcal{K}^\perp$ une variété invariante sous l'action coadjointe de $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{K}^\perp \approx \mathcal{N}^*$. De l'identité

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H\left(Ad_{g(t)}(a)\right)\Big|_{t=0} = 0,$$

où $g(t) = 1 + bt + o(t)$, $b \in \mathcal{L}$, $a \in V$, on déduit la relation

$$[\nabla H(a), a] = 0, \quad a \in V$$

ou ce qui revient au même

$$[a, \nabla_{\mathcal{K}^\perp} H] = -\,[a, pr_{\mathcal{K}}(\nabla H)]\,. \tag{28}$$

Le crochet de Poisson entre deux fonctions H_1 et H_2 sur $\mathcal{N}^*$ s'écrit

$$\{H_1, H_2\}(a) = \langle\langle a, [\nabla_{\mathcal{N}^*} H_1, \nabla_{\mathcal{N}^*} H_2]\rangle\rangle\ , \quad a \in \mathcal{N}^*$$

où $\langle\langle\cdot\,,\cdot\rangle\rangle$ est la forme induite héritant de la structure de Kostant-Kirillov et $\nabla_{\mathcal{N}^*} H_1 \in \mathcal{N}$ est le gradient défini par

$$\mathrm{d}H_1(X) = \langle\langle \mathrm{d}X, \nabla_{\mathcal{N}^*} H_1, \rangle\rangle\,.$$

Comme $\mathcal{K}^\perp \approx \mathcal{N}^*$ et $\langle\langle\cdot\,,\cdot\rangle\rangle = \langle\cdot\,,\cdot\rangle|_{\mathcal{K}^\perp \times \mathcal{N}}$, alors

$$\{H_1, H_2\}(a) = \langle a, [\nabla_{\mathcal{K}^\perp} H_1, \nabla_{\mathcal{K}^\perp} H_2]\rangle\,. \tag{29}$$

Supposons maintenant que $H_1, H_2 \in \mathcal{A}(V)$ et satisfaisant à la relation (28). Alors, en vertu des relations (28) et (29) et le fait que $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ est ad-invariante, on obtient

$$\begin{aligned} \{H_1, H_2\} &= \langle [a, \nabla_{\mathcal{K}^\perp} H_1], \nabla_{\mathcal{K}^\perp} H_2 \rangle = \\ &= -\langle [a, pr_{\mathcal{K}} H_1], \nabla_{\mathcal{K}^\perp} H_2 \rangle = -\langle a, [pr_{\mathcal{K}} H_1, \nabla_{\mathcal{K}^\perp} H_2] \rangle. \end{aligned}$$

En utilisant un raisonnement similaire pour H_2, on obtient

$$\{H_1, H_2\} = \langle a, [pr_{\mathcal{K}} H_1, \nabla_{\mathcal{K}^\perp} H_2] \rangle.$$

Puisque $\mathcal{K}$ est une algèbre de Lie et $a \in \mathcal{K}^\perp$, on obtient $\{H_1, H_2\} = 0$. Le champ de vecteurs hamiltonien s'écrit

$$X_{H_1}(H_2) = \{H_1, H_2\} = \langle [\nabla_{\mathcal{K}^\perp} H_1, a], \nabla_{\mathcal{K}^\perp} H_2 \rangle,$$

et on a

$$X_{H_1}(a) = pr_{\mathcal{K}^\perp} [\nabla_{\mathcal{K}^\perp} H_1, a].$$

Dès lors, le flot hamiltonien correspondant est

$$\dot{a} = pr_{\mathcal{K}^\perp} [\nabla_{\mathcal{K}^\perp} H_1, a], \quad H_1 \in \mathcal{A}(V)$$

et d'après (28),

$$\dot{a} = pr_{\mathcal{K}^\perp} [a, \nabla_{\mathcal{K}^\perp} H_1].$$

Or $[\mathcal{K}^\perp, K] \subset \mathcal{K}^\perp$, donc

$$\dot{a} = [a, \nabla_{\mathcal{K}^\perp} H_1],$$

d'où le résultat. $\square$

Pour toute algèbre de Lie $\mathcal{L}$ de dimension finie munie du crochet $[\,,]$ et de la forme de Killing $\langle\,,\rangle$, il existe une extension formelle (dimension infinie) sous forme de série de Laurent:

$$\mathcal{L} = \left\{ \sum_{-\infty}^{N} A_i h^i : A_i \in \mathcal{L}, N \in \mathbb{Z} \text{ arbitraire} \right\},$$

munie du crochet

$$\left[\sum A_i h^i, \sum B_j h^j \right] = \sum_{i,j} [A_i, B_j]\, h^{i+j},$$

et des formes symétriques ad-invariantes

$$\left\langle \sum A_i h^i, \sum B_j h^j \right\rangle_k = \sum_{i+j=-k} \langle A_i, B_j \rangle\,, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si $\langle\,,\rangle$ est non-dégénérée, alors il en est de même des formes $\langle\,,\rangle_k$. Soit $\mathcal{L}_{p,q}$ $(p \leq q)$ l'espace vectoriel des puissances de h compris entre p et q. Une classe intéressante de problèmes s'obtient en prenant $\mathcal{L} = \mathcal{G}l(n, \mathbb{R})$ et en choisissant la forme $\langle\, , \rangle_1$ sur l'extension de Kac-Moody. Alors nous avons la décomposition en sous algèbres de Lie

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{0,\infty} \oplus \mathcal{L}_{-\infty,-1} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{N},$$

avec $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{\perp}$, $\mathcal{N} = \mathcal{N}^{\perp}$ et $\mathcal{K} = \mathcal{N}^*$. Considérons la variété invariante V_m, $m \geq 1$ dans $\mathcal{K} = \mathcal{N}^*$, définie par

$$V_m = \left\{ A = \sum_{i=1}^{m-1} A_i h^i + \alpha h^m,\ \alpha = \text{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \text{ fixé} \right\},$$

avec diag $(A_{m-1}) = 0$. On montre [2, 3], que la variété V_m possède une structure symplectique naturelle, les fonctions $H = \left\langle f(Ah^{-j}), h^k \right\rangle_1$ sur V_m (f étant régulière) mènent à des systèmes complètement intégrables ayant la forme

$$\dot{A} = \left[A, pr_{\mathcal{K}}(f'(Ah^{-j})h^{k-j}) \right], \quad A = \sum_{i=0}^{m-1} A_i h^i + \alpha h.$$

Ces systèmes se linéarisent sur la variété jacobienne d'une courbe algébrique d'équation affine

$$P\,(z, h) = \det\,(A - zI) = 0,$$

et de genre $(n-1)\,(nm-2)\,/2$. Les coefficients de ce polynôme fournissent les invariants d'orbite de V_m et un ensemble d'intégrales premières indépendantes. En particulier, pour $j = m$, $k = m+1$, les flots s'écrivent sous la forme

$$\dot{A} = \left[A,\ ad_{\beta}\, ad_{\alpha}^{-1} A_{m-1} + \beta h \right],$$

avec $\beta_i = f'\,(\alpha_i)$.

Une autre classe intéressante s'obtient en choisissant une algèbre de Lie L semi-simple quelconque. Alors pour l'extension de Kac-Moody $\mathcal{L}$ munie de la forme $\langle\, , \rangle = \langle\, , \rangle_0$, on a

$$\mathcal{L} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} L_i, [L_i, L_j] \subset L_{i+j}, \quad [L_0, L_0] = 0, \quad L_i^* = L_{-i}.$$

Soit

$$B^+ = \sum_{i \geq 0} L_i, \quad B^- = \sum_{i \langle 0} L_i.$$

Alors le produit $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ avec

$$\left[(l_1, l_2)\,, (l_1', l_2') \right] = \left([l_1, l_1'], -[l_2, l_2'] \right), \quad \left\langle (l_1, l_2)\,, (l_1', l_2') \right\rangle = \langle l_1, l_1' \rangle - \langle l_2, l_2' \rangle,$$

admet la décomposition en $\mathcal{K} + \mathcal{N}$ avec

$$\mathcal{K} = \{(l, -l) : l \in \mathcal{L}\}\,, \quad \mathcal{K}^{\perp} = \{(l, l) : l \in \mathcal{L}\}\,,$$
$$\mathcal{N} = \left\{ (l_-, l_+) : l_- \in B^-,\ l_+ \in B^+,\ pr_0(l_-) = pr_0(l_+) \right\},$$
$$\mathcal{N}^{\perp} = \left\{ (l_-,\ l_+) : l_- \in B^-,\ l_+ \in B^+,\ pr_0(l_+ + l_-) = 0 \right\},$$

où pr_0 désigne la projection sur L_0. Dès lors, en vertu du théorème précédent, les orbites dans $\mathcal{N}^* = \mathcal{K}^\perp$ possèdent un ensemble de champs de vecteurs hamiltoniens commutatifs. Plus précisément [2, 3, 30], la variété N-invariante définie par

$$V_{-j,k} = \sum_{-j \le i \le k} L_i \subseteq \mathcal{L} \simeq \mathcal{K}^\perp,$$

possède une structure symplectique naturelle et les fonctions $H(l_1, l_2) = f(l_1)$ sur $V_{-j,k}$ mènent à des champs de vecteurs commutants et ayant la forme de Lax suivante:

$$\dot{l} = \left[l, \left(pr^+ - \frac{1}{2} pr_0 \right) \nabla H \right], \; pr^+ \text{ projection sur } B^+.$$

La linéarisation s'effectue sur la variété jacobienne d'une courbe définie par le polynôme caractéristique d'éléments dans $V_{-j,k}$.

Remerciements. Je remercie le referee pour ses remarques et suggestions constructives.

RÉFÉRENCES

[1] M. Adler, *On a trace functional for pseudo-differential operators and the symplectic structure of the Korteweg-de Vries equation.* Invent. Math. **50** (1979), 219–248.

[2] M. Adler and P. van Moerbeke, *Completely integrable systems, Euclidean Lie algebras and curves.* Adv. in Math. **38** (1980), 267–317.

[3] M. Adler and P. van Moerbeke, *Linearization of Hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory.* Adv. in Math. **38** (1980), 318–379.

[4] M. Adler, T. Shiota and P. van Moerbeke, *Random matrices, Virasoro algebras and non-commutative KP.* Duke Math. J. **94** (1998), 379–431.

[5] M. Adler, P. van Moerbeke and P. Vanhaecke, *Algebraic integrability, Painlevé geometry and Lie algebras.* A Series of Modern Surveys in Mathematics **47**, Springer-Verlag, 2004.

[6] E. Arbarello and C. De Concini, *Another proof of a conjecture of S.P. Novikov on periods of abelian integrals on Riemann surfaces.* Duke Math. J. **54** (1998), 163–178.

[7] A.I. Belokolos, V.Z. Bobenko, V.Z. Enol'skii, A.R. Its and V.B. Matveev, *Algebro-Geometric approach to nonlinear integrable equations.* Springer-Verlag, 1994.

[8] I.V. Cherednick, *Differential equations for the Baker-Akhiezer functions of algebraic curves.* Funct. Anal. Appl. **12** (1978), 45–54.

[9] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, *Transformation groups for soliton equations, Proc. RIMS Symp. Nonlinear integrable systems* (*Kyoto,* 1981). Classical and quantum theory, pp. 39–119. Singapore, World Scientific, 1983.

[10] L. Dickey, *Soliton equations and integrable systems.* World Scientific, 1991.

[11] L. Dickey, *Additional symmetries of KP, Grassmannian and the string equation.* Preprint, 1992.

[12] L. Dickey, *Lectures on classical W-algebras* (Cortona Lectures). Acta Appl. Math. **47** (1997), 243–321.

[13] I.M. Gel'fand and L. Dickey, *Family of hamiltonian structures connected with integrable nonlinear differential equations*. Funct. Anal. Appl. **2** (1968), 92–93.

[14] J.-L. Gervais, *Infinite family of polynomial functions of the Virasoro generators with vanishing Poisson bracket*. Phys. Letters. **16013** (1985), 277.

[15] B. Kostant, *The solution to a generalized Toda lattice and representation theory*. Adv. in Math. **34** (1979), 195–338.

[16] P. Lax, I*ntegrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*. Comm. Pure Appl. Math. **21** (1968), 467–490.

[17] A. Lesfari, *Abelian surfaces and Kowalewski's top*. Ann. Scient. École Norm. Sup. Paris **21** (1988), 193–223.

[18] A. Lesfari, *Completely integrable systems: Jacobi's heritage*. J. Geom. Phys. **31** (1999), 265–286.

[19] A. Lesfari, *Abelian varieties, surfaces of general type and integrable systems*. Beiträge Algebra Geom. **48** (2007), 95–114.

[20] A. Lesfari, *Integrables hamiltonian systems and the isospectral deformation method*. Int. J. of Appl. Math. and Mech. **3** (2007), 35–55.

[21] A. Lesfari, *Integrable systems and complex geometry*. Lobachevskii J. Math. **30** (2009), 292–326.

[22] M. Sato, *Soliton equations and the universal Grassmann manifold* (by Noumi in japanese). Math. Lect. Note Ser. **18**. Sophia University, Tokyo, 1984.

[23] M. Sato, *The KP hierarchy and infinite-dimensional Grassmann manifolds*. Proc. of Sympos. Pure Math. **49** (1989), 51–66.

[24] M. Sato and Y. Sato, *Soliton equations as dynemical systems on infinite dimensional Grassmann manifolds*. Lect. Notes in Num. Appl. Anal. **5** (1982), 259–271.

[25] T. Shiota, *Characterization of jacobian varieties in terms of soliton equations*. Invent. Math. **83** (1986), 333–382.

[26] W. Symes, *Systems of Toda type, inverse spectral problems and representation theory*. Invent. Math. **59** (1980), 13–53.

[27] P. van Moerbeke, *Integrable foundations of string theory*. In: O. Babelon, P. Cartier, Y. Kosmann-Schwarzbach (Eds.), Lectures on Integrable Systems, Proceedings of the CIMPA-school, 1991, World Scientific, 1994, 163–267.

[28] P. van Moerbeke, *Algèbres* W *et équations non-linéaires*. Séminaire Bourbaki **40** (1997–1998), Exposé No. 839.

[29] P. van Moerbeke, *Random and Integrable Models in Mathematics and Physics*. arXiv:math.PR/0712.3847, 22 December 2007, 1–163.

[30] P. van Moerbeke and D. Mumford, *The spectrum of difference operators and algebraic curves*. Acta Math. **143** (1979), 93–154.

Received 19 April 2010

Université Chouab Doukkali
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
B.P. 20, El Jadida, Maroc
lesfariahmed@yahoo.fr