HOMOGÉNÉISATION ET CONTRÔLABILITÉ EXACTE DE STRUCTURES MINCES EN QUINCONCE

NADIA AIB

Let $\Omega_{\varepsilon\mu}$ be a lattice-type plate of thickness ε, ε-periodically perforated by staggered holes. The material is concentrated on layers of thickness $\varepsilon\mu$. We are interested in the exact internal controllability of the wave equation posed in $\Omega_{\varepsilon\mu}$ with a homogeneous Neumann boundary condition on the boundary of the holes. First, an exact internal control $v_{\varepsilon\mu}$ is built by the HUM method introduced by J.L. Lions. Then we study the asymptotic behaviour of the system and of the sequence of controls $v_{\varepsilon\mu}$ as first $\varepsilon \to 0$ and afterwards $\mu \to 0$. The first passage to the limit is a classical homogenization process. We show that $v_{\varepsilon\mu}$ converge weakly to a function v_μ which is an exact internal control for the homogenized system. This stability property with respect to the small parameter ε, also occurs with respect to the second small parameter μ. Indeed, we show that v_μ converges to a function v, an exact control for the limit system obtained by letting $\mu \to 0$ in the homogenized problem.

AMS 2000 Subject Classification: 49J45, 35B27, 49J30.

Key words: homogenization, perforated domain, reticulated structure, internal control.

INTRODUCTION

La première partie de ce travail a été motivée par les travaux de D. Cioranescu et J. Saint Jean Paulin [7], [8] concernant l'homogénéisation de problèmes posés dans des ouverts bornés perforés périodiquement.

Dans une première étape, nous faisons ici la même étude pour l'équation des ondes dans une plaque mince avec des trous disposés en quinconce. Tout d'abord, on étudie par la méthode HUM de J.L. Lions [11] (voir aussi[10]) la contrôlabilité exacte de ce problème en imposant une condition de Neumann homogène sur les bords des trous. On montre l'existence d'un contrôle exact. On homogénéise ensuite et on montre que le système homogénéisé est exactement contrôlable par la limite du contrôle exact obtenu par HUM.

Dans la deuxième partie de ce travail, motivée par les travaux de D. Cioranescu et P. Donato [6] et de L.R. Tcheugoué Tébou [15], on montre tout

REV. ROUMAINE MATH. PURES APPL., **53** (2008), *2–3*, 89–124

d'abord que le système homogéneisé est exactement contrôlable par la méthode HUM. On s'intéresse ensuite au comportement du système et du contrôle lorsque l'épaisseur μ du matériau tend vers zéro. Cette étude est réalisée par la technique de structures réticulées de D. Cioranescu et J. Saint Jean Paulin [8] (voir aussi Aib [1]). On prouve, comme dans la première partie, qu'on a stabilité du problème par rapport au petit paramètre μ, le contrôle exact du système homogéneisé converge vers le contrôle exact du système obtenu en passant à la limite avec $\mu \to 0$.

Le plan du travail est le suivant. La géométrie de la plaque preforée $\Omega_{\varepsilon\mu}$, d'épaisseur ε est décrite dans le paragraphe 1.1 du Chapitre 1, μ représantant ici l'épaisseur des couches de matériau dont la plaque est consituée. Nous écrivons l'équation des ondes dans $\Omega_{\varepsilon\mu}$. Par un changement des variables (technique des domaines minces, voir Ciarlet [4], Ciarlet et Destuynder [5]), $\Omega_{\varepsilon\mu}$ est transformé dans un domaine d'épaisseur fixe, le paramètre ε apparaissant alors explicitement dans l'équation transformée. On prouve ensuite l'existence et l'unicité d'une solution de cette équation. Dans le paragraphe 2.1 nous donnons un premier résultat d'homogénéisation. En utilisant des prolongements, nous établissons des estimations a priori des solutions, permettant de faire $\varepsilon \to 0$ dans l'équation homogénéisée et d'obtenir une équation des ondes homogénéisée posée sur la section droite (pleine) de la plaque (on perd ainsi une dimension de l'espace). Dans cette équation les coefficients dépendent du paramètre μ.

Dans le Chapitre 2, dans les paragraphes 2.1 et 2.2, nous étudions la contrôlabilité exacte interne de l'équation de départ. Par la méthode HUM introduite par J.L. Lions [11], nous construisons un contrôle exact interne pour lequel une estimation a priori est établie. Dans le paragraphe 2.3, en se basant sur les résultats du Chapitre 1, nous passons à l'homogénéisation du système. Nous prouvons que le contrôle exact converge vers le contrôle exact du problème homogénéisé dont les coefficients dépendent du paramètre μ.

Dans le Chapitre 3, on s'intéresse au comportement asymptotique du système homogénéisé et de son contrôle lorsque $\mu \to 0$. Par la technique de structures réticulées de [8], on détermine un système limite. Enfin, on prouve que la limite des contrôles est encore un contrôle exact du système limite.

1. HOMOGÉNÉISATION

1.1. Position du problème

On consière le domaine perforé décrit par la Figure 1; il est contenu dans l'ouvert $\omega_\varepsilon =]0, \varepsilon[\times]0, \ell[\times]0, L[$, où ε designe l'épaisseur de la plaque ainsi que la période. La périodicité n'a lieu que dans les directions x_2 et x_3.

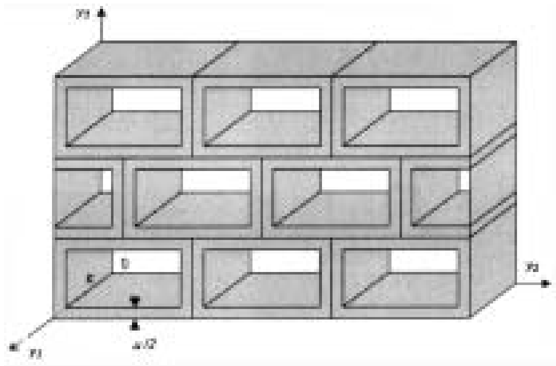

Fig. 1. Le domaine en quinconce.

On pose $L = m\varepsilon$ et $l = n\varepsilon$ et on recouvre ω_ε par mn cellules εY, où

$$Y =]0,1[\times]0,2[\times]0,2[$$

est la cellule de référence (voir Figure 2).

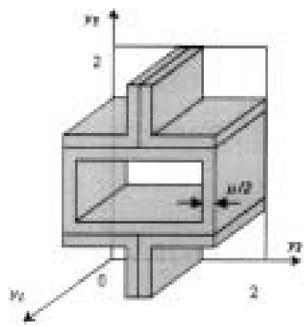

Fig. 2. La cellule de référence.

On note Y_u^*(resp. $\omega_{\varepsilon u}^*$) la partie de Y (resp. ω_ε) occupée par le matériau où μ est un petit paramètre qui designe l'épaisseur des couches. On introduit enfin les notations

$$\omega_{\varepsilon\mu}^{*,0} =]0,\varepsilon[\times]0,\ell[\times\{0\}\,, \quad \gamma_{\varepsilon\mu} = \partial\omega_{\varepsilon\mu}^{*} \setminus \omega_{\varepsilon\mu}^{*,0}.$$

Notation. Dans toute la suite, les indices i, j prennent leurs valeurs dans $\{1,\, 2,\, 3\}$, alors que k, ℓ varient dans $\{2, 3\}$. Les indices répétés sont sommés.

On considère le système

$$
(1.1)\qquad \begin{cases} v''_{\varepsilon\mu} - \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\dfrac{\partial v_{\varepsilon\mu}}{\partial x_j}\right) = 0 & \text{dans } \omega^*_{\varepsilon\mu}\times]0,T[, \\ v_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{sur } \omega^{*,0}_{\varepsilon\mu}\times]0,T[, \\ a_{ij}\dfrac{\partial v_{\varepsilon\mu}}{\partial x_j}\nu_i = 0 & \text{sur } \gamma_{\varepsilon\mu}\times]0,T[, \\ v_{\varepsilon\mu}(0) = v^0_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \omega^*_{\varepsilon\mu}, \\ v'_{\varepsilon\mu}(0) = v^1_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \omega^*_{\varepsilon\mu}, \end{cases}
$$

où $\nu = (\nu_i;\ 1 \leq i \leq 3)$ est la normale unitaire extérieure à $\partial\omega^*_{\varepsilon\mu}$, T est un nombre réel arbitraire strictement positif. Les coefficients a_{ij}, $1 \leq i, j \leq 3$, sont des constantes indépendantes de ε et μ et vérifient

$$
(1.2)\qquad \begin{cases} a_{ij} = a_{ji}, \\ \exists m > 0 \text{ tel que } a_{ij}\xi_i\xi_j \geq m\xi_i\xi_i,\ \forall\xi = (\xi_i) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}
$$

Pour travailler dans un domaine fixe, on fait le changement de variable

$$
(1.3)\qquad z_1 = \frac{x_1}{\varepsilon}, \quad z_2 = x_2, \quad z_3 = x_3.
$$

Toute fonction ϕ définie sur ω_ε est ainsi transformée en une fonction définie sur le domaine fixe $\Omega =]0,1[\times]0,\ell[\times]0,L[$.

On pose $u_{\varepsilon\mu}(z_1, z_2, z_3) = v_{\varepsilon\mu}(z_1,\ z_2, \varepsilon z_3)$. Alors la première équation du système (1,1) devient

$$
u''_{\varepsilon\mu} - \varepsilon^{-2}a_{11}\frac{\partial^2 u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1^2} - \varepsilon^{-1}a_{il}\frac{\partial^2 u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1\partial z_l} - \varepsilon^{-1}a_{k1}\frac{\partial^2 u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_k\partial z_1} - \varepsilon^{-1}a_{kl}\frac{\partial^2 u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_k\partial z_l} = 0,
$$

que nous écrirons, pour simplifier la présentation, sous la forme

$$
(1.4)\qquad u''_{\varepsilon\mu} + A_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu} = 0
$$

(avec une signification évidente pour $A_{\varepsilon\mu}$). Le système transformé de (1.1) par le changement (1.3) est alors

$$
(1.5)\qquad \begin{cases} u''_{\varepsilon\mu} + A_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}\times]0,T[, \\ u_{\varepsilon\mu} = 0 & \text{sur } \Omega^{*0}_{\varepsilon\mu}\times]0,T[, \\ \left(\varepsilon^{-1}a_{i1}\dfrac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} + a_{il}\dfrac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_l}\right)v_i = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\mu}\times]0,T[, \\ u_{\varepsilon\mu}(0) = u^0_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}, \\ u'_{\varepsilon\mu}(0) = u^1_{\varepsilon\mu} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}, \end{cases}
$$

où $\Omega^*_{\varepsilon\mu}$, $\Omega^{*0}_{\varepsilon\mu}$ et $\Gamma_{\varepsilon\mu}$ sont les transformées respectives de $\omega^*_{\varepsilon\mu}, \omega^{*,0}_{\varepsilon\mu}$ et $\gamma_{\varepsilon\mu}$.

Le résultat suivant est classique, voir [6] ou [11] pour sa démonstration, Pour une appplication de la méthode de Hille et Yosida, voir [3], [9] et [12]. Pour plus de détails, voir aussi V. Komornik [10].

THÉORÈME 1.1. *Supposons que les données initiales* $u^0_{\varepsilon\mu}$ *et* $u^1_{\varepsilon\mu}$ *du système* (1.1) *vérifient*

$$u^0_{\varepsilon\mu} \in V_{\varepsilon\mu} \quad et \quad u'_{\varepsilon\mu} \in L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu}). \tag{1.6}$$

Alors (1.5) *possède une et une seule solution* $u_{\varepsilon\mu}$, *et cette solution est telle que*

$$u_{\varepsilon\mu} \in C(]0,T[, V_{\varepsilon\mu}) \cap C^1(]0,T[, L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu})). \tag{1.7}$$

1.2. **Premier résultat de convergence: Homogénéisation**

Dans ce paragraphe, nous allons faire tendre ε vers zéro et nous étudierons la stabilité par rapport à ce passage du problème limite obtenu. Pour ce faire, nous aurons besoin des résultats suivants:

LEMME 1.2 ([7]). *Pour tout* $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$, *il existe un opérateur de prolongement* $Q_{\varepsilon\mu} \in \mathcal{L}(H^k(\Omega^*_{\varepsilon\mu}), H^k(\Omega))$, $k = 0, 1$, *vérifiant*

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad Q_{\varepsilon\mu} u_{\varepsilon\mu} = u_{\varepsilon\mu} \ \ dans \ \Omega^*_{\varepsilon\mu};\\
&\text{(ii)} \quad \|Q_{\varepsilon\mu} u_{\varepsilon\mu}\|_{L^2(\Omega)} \le C \|u_{\varepsilon\mu}\|_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu})};\\
&\text{(iii)} \quad \|\nabla Q_{\varepsilon\mu} u_{\varepsilon\mu}\|_{[L^2(\Omega)]^3} \le C \,\|\nabla u_{\varepsilon\mu}\|_{[L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu})]^3},
\end{aligned}$$

où C *est une constante positive indépendante de* ε *et* μ.

LEMME 1.3 ([6]). *Pour tout* $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$, *il existe un opérateur de prolongement*

$$P_{\varepsilon\mu} \in \mathcal{L}(L^\infty(0,T; H^k(\Omega^*_{\varepsilon\mu}), L^\infty(0,T, H^k(\Omega))), \quad k = 0, 1,$$

tel que pour tout $\varphi \in L^\infty(0,T, H^k(\Omega^*_{\varepsilon\mu}))$ *avec* $\varphi' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu}))$ *on ait*

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad P_{\varepsilon\mu}\varphi = \varphi \ \ dans \ \Omega^*_{\varepsilon\mu}\times]0,T[\,;\\
&\text{(ii)} \quad P_{\varepsilon\mu}\varphi' = (P_{\varepsilon\mu}\varphi)' \ \ dans \ \Omega^*_{\varepsilon\mu}\times]0,T[\,;\\
&\text{(iii)} \quad \|P_{\varepsilon\mu}\varphi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \le C\,\|\varphi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu}))};\\
&\text{(iv)} \quad \|\nabla P_{\varepsilon\mu}\varphi\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^3)} \le C\,\|\nabla\varphi\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu})]^3)};\\
&\text{(v)} \quad \left\|P_{\varepsilon\mu}\varphi'\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \le C\,\left\|\varphi'\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu}))},
\end{aligned}$$

où C *est une constante positive indépendante de* ε *et* μ.

Nous sommes maintenant en mesure de formuler le résultat principal de ce paragraphe.

Théorème 1.4. *On suppose que les données initiales dans* (1.5) *vérifient*

$$
(1.8)\qquad \begin{cases} \left\|u^0_{\varepsilon\mu}\right\|_{V_{\varepsilon\mu}} \leq \dfrac{c}{\mu} \text{ et } \widetilde{u^0_{\varepsilon\mu}} \rightharpoonup u^0_\mu \text{ faiblement dans } L^2(\Omega), \\ \left\|u^1_{\varepsilon\mu}\right\|_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu})} \leq c \text{ et } \widetilde{u^0_{\varepsilon\mu}} \rightharpoonup u^1_\mu \text{ faiblement dans } L^2(\Omega), \end{cases}
$$

où C est une constante positive indépendante de ε et μ, et $\sim$ désigne le prolongement par zéro à Ω de toute fonction définie dans $\Omega^*_{\varepsilon\mu}$.

Alors, lorsque $\varepsilon \to 0$ (avec μ fixe), on a les convergences

$$
(1.9)\qquad \begin{cases} P_{\varepsilon\mu} u_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup u_\mu \text{ faible } * \text{ dans } L^\infty(0,T;H^1(\Omega)), \\ P_{\varepsilon\mu} u'_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup u'_\mu \text{ faible } * \text{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \end{cases}
$$

où la fonction limite u_μ est indépendante de z_1 et vérifie le système homogénéisé

$$
(1.10)\qquad \begin{cases} \left|Y^*_\mu\right| u''_\mu - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(a^{kl}_\mu \dfrac{\partial u_\mu}{\partial z_l}\right) = 0 & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[, \\ u_\mu = 0 & \text{sur } \partial\big(]0,\ell[\times]0,L[\big)\times]0,T[, \\ u_\mu(0) = \dfrac{u^0_\mu}{\left|Y^*_\mu\right|} & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[, \\ u'_\mu(0) = \dfrac{u^{1,*}_\mu}{\left|Y^*_\mu\right|} & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[, \end{cases}
$$

avec

$$
u^{1,*}_\mu = \int_0^1 u^1_\mu \mathrm{d}z_1.
$$

Les coefficients homogénéisés q^{kl}_μ sont donnés par

$$
(1.11)\qquad q^{kl}_\mu = \int_{Y^*_\mu} a_{ij} \frac{\partial(-X^k_\mu + y_k)}{\partial y_i} \frac{\partial(-X^l_\mu + y_l)}{\partial y_j} \,\mathrm{d}y,
$$

où les fonctions X^k_μ sont solutions du système

$$
(1.12)\qquad \begin{cases} a_{ij} \dfrac{\partial^2(-X^k_\mu + y_k)}{\partial y_i \partial y_j} = 0 \quad \text{dans } Y^*_\mu, \\ a_{ij} \dfrac{\partial(-X^k_\mu + y_k)}{\partial y_j} n_i = 0 \quad \text{sur } \partial_N Y^*_\mu, \\ X^k_\mu \text{ est périodique en } y_2 \text{ et } y_3, \\ \mathcal{M}_{Y^*_\mu}(X^k_\mu) = \dfrac{1}{\left|Y^*_\mu\right|} \displaystyle\int_{Y^*_\mu} X^k_\mu \,\mathrm{d}y = 0. \end{cases}
$$

Preuve. On commence par montrer qu'il y a conservation de l'énergie du système (1.5). Multiplions (1.5) par $u'_{\varepsilon\mu}$ et intégrons par parties sur $\Omega^*_{\varepsilon\mu}\times]0,T[$. Il vient

$$\int_0^T \Big(\int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u'^2_{\varepsilon\mu})\,\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t + \int_0^T \Big[\int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} \Big(\varepsilon^{-2}a_{11}\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1}\frac{\partial u'_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} + \varepsilon^{-1}a_{1l}\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1}\frac{\partial u'_{\varepsilon\mu}}{\partial z_l} +$$
$$+\varepsilon^{-1}a_{k1}\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_k}\frac{\partial u'_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} + a_{kl}\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_k}\frac{\partial u'_{\varepsilon\mu}}{\partial z_l}\Big)\mathrm{d}z\Big]\mathrm{d}t = 0.$$

Le terme sur le bord est nul grâce à (1.5). La symétrie (1.2) des a_{ij} donne

$$\int_0^T \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{\int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} \Big[u'^2_{\varepsilon\mu} + \varepsilon^{-2}a_{11}\Big(\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1}\Big)^2 +$$
$$+2\varepsilon^{-1}a_{1l}\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1}\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_l} + a_{kl}\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_k}\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_l}\Big]\mathrm{d}z\Big\}\mathrm{d}t = 0,$$

i.e.,

$$\int_0^T \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[E(t)]\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow E(T) = E(0), \tag{1.13}$$

où

$$\begin{cases} E(0) = \dfrac{1}{2}\Big[\big\|u^1_{\varepsilon\mu}\big\|^2_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu})} + \big\|u^0_{\varepsilon\mu}\big\|^2_{V_{\varepsilon\mu}}\Big], \\ E(t) = \displaystyle\int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}}\Big[u'^2_{\varepsilon\mu} + \varepsilon^{-2}a_{11}\Big(\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1}\Big)^2 + 2\varepsilon^{-1}a_{1\ell}\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1}\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_l} + a_{kl}\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_k}\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_l}\Big]\mathrm{d}z. \end{cases} \tag{1.14}$$

De (1.13) et (1.14) on déduit les estimations

$$\big\|u'_{\varepsilon\mu}\big\|_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu})} \leq \frac{c}{\mu}, \quad \|u_{\varepsilon\mu}\|_{(L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu})} \leq \frac{c}{\mu}, \tag{1.15}$$

où c est une constante indépendante de ε et μ. Grâce à (1.3)–(1.5), on aboutit à

$$\Big\|\varepsilon^{-1}\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1}\Big\|^2_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu})} \leq \frac{c}{\mu}, \quad \Big\|\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_2}\Big\|^2_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu})} \leq \frac{c}{\mu}, \quad \Big\|\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_3}\Big\|^2_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu})} \leq \frac{c}{\mu},$$

d'où

$$\|\nabla u_{\varepsilon\mu}\|_{(L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu}))^2} \leq \frac{c}{\mu},$$

qui, par l'inégalité de Poincaré (avec une constante ne dépendant que du diamètre de Ω), donne

$$\|u_{\varepsilon\mu}\|_{H^1(\Omega^*_{\varepsilon\mu})} \leq \frac{c}{\mu}.$$

Alors, de (1.15) on a finalement

$$\left\|u'_{\varepsilon\mu}\right\|_{(L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu}))} \leq \frac{c}{\mu}, \quad \left\|u_{\varepsilon\mu}\right\|_{L^{\infty}(0,T;(H'(\Omega^*_{\varepsilon\mu}))} \leq \frac{c}{\mu}.$$

Ceci permet d'appliquer le Lemme 2.2 pour avoir, à une sous-suite près, les convergences

$$\left\{\begin{array}{ll} P_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu} \to u_{\mu} & \text{faible} * \text{dans } L^{\infty}(0,T;H^1(\Omega)), \\ P_{\varepsilon\mu}u'_{\varepsilon\mu} \to u'_{\mu} & \text{faible} * \text{dans } L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega)), \end{array}\right. \tag{1.16}$$

où u_μ est indépendante de z_1 (voir [4] et [5]).

Il nous reste à montrer que u_μ vérifie les autres équations de (1.10). Posons

$$\xi^i_{\varepsilon\mu} = \varepsilon^{-1}a_{i1}\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} + a_{ik}\frac{\partial u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_k}, \quad i = 1,2,3.$$

En vertu de (1.15),

$$\left\|\xi^i_{\varepsilon\mu}\right\|_{L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu}))} \leq \frac{c}{\mu},$$

de sorte qu'à une sous-suite près on a

$$\widetilde{\xi^i_{\varepsilon\mu}} \to \xi^i_{\mu} \quad \text{faible} * \text{dans } L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega)),$$

avec $\xi^i_{\varepsilon\mu}$ vérifiant le système

$$\left\{\begin{array}{ll} u''_{\varepsilon\mu} - \varepsilon^{-1}\dfrac{\partial\xi^1_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} - \dfrac{\partial\xi^2_{\varepsilon\mu}}{\partial z_2} - \dfrac{\partial\xi^3_{\varepsilon\mu}}{\partial z_3} = 0 & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}\times]0,T[, \\ \xi^1_{\varepsilon\mu n_1} = \xi^2_{\varepsilon\mu n_2} = \xi^3_{\varepsilon\mu n_3} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\mu}\times]0,T[, \end{array}\right.$$

soit encore, avec la notation $\chi_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}}$ pour la fonction caractéristique de $\Omega^*_{\varepsilon\mu}$,

$$\left\{\begin{array}{l} (P_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu})''\chi_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} - \varepsilon^{-1}\dfrac{\partial\widetilde{\xi^1_{\varepsilon\mu}}}{\partial z_1} - \dfrac{\partial\widetilde{\xi^2_{\varepsilon\mu}}}{\partial z_2} - \dfrac{\partial\widetilde{\xi^3_{\varepsilon\mu}}}{\partial z_3} = 0 \quad \text{dans } \Omega\times]0,T[, \\ \widetilde{\xi^1_{\varepsilon\mu}}.n_1 = \widetilde{\xi^2_{\varepsilon\mu}}.n_2 = \widetilde{\xi^3_{\varepsilon\mu}}.n_3 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \setminus (]0,1[\times\{0\})\times]0,T[. \end{array}\right. \tag{1.17}$$

Soient maintenant $\varphi \in \mathcal{D}(]0,\ell[\times]0,L[)$ et $v \in \mathcal{D}(]0,T[)$, et multiplions $(1.17)_1$ par φv. En intégrant par parties le premier terme par rapport à t et le second par rapport à z, on obtient

$$\int_0^T\Big(\int_{\Omega}P_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu}\varphi v''\chi_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}}\,\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t + \int_0^T\int_{\Omega}\Big(\widetilde{\xi^2_{\varepsilon\mu}}\frac{\partial\varphi}{\partial z_2} + \widetilde{\xi^3_{\varepsilon\mu}}\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}\Big)v\,\mathrm{d}z\mathrm{d}t = 0. \tag{1.18}$$

En se rappelant (voir, par exemple, [2]) la convergence

$$\chi_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} \to \left|Y^*_{\mu}\right| \quad \text{faible} * \text{dans } L^{\infty}(\Omega),$$

le passage à la limite pour $\varepsilon \to 0$ dans (1.18) donne

$$\int_0^T \Big(\int_\Omega u_\mu \varphi v'' \left| Y_\mu^* \right| \mathrm{d}z \Big) \mathrm{d}t + \int_0^T \Big[\int_\Omega \Big(\xi_\mu^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} + \xi_\mu^3 \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} \Big) \mathrm{d}z \Big] \mathrm{d}t = 0,$$

d'où

$$\int_0^T \Big[\int_0^L \int_0^\ell \int_0^1 \Big(\xi_\mu^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} + \xi_\mu^3 \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} \Big) \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2 \mathrm{d}z_3 \Big] v \, \mathrm{d}t = \\ = - \left| Y_\mu^* \right| \int_0^T \int_0^L \int_0^\ell \int_0^1 u_\mu \varphi v'' \mathrm{d}z \mathrm{d}t,$$

avec u_μ dépendant seulement de z_2 et z_3. Le système limite s'écrit alors sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial z_2} \left(\int_0^1 \xi_\mu^2 \mathrm{d}z_1 \right) + \frac{\partial}{\partial z_3} \left(\int_0^1 \xi_\mu^3 \mathrm{d}z_1 \right) = \left| Y_\mu^* \right| u_\mu''. \tag{1.19}$$

Maintenant, nous allons identifier les termes $\int_0^1 \xi_\mu^2 \mathrm{d}z_1$ et $\int_0^1 \xi_\mu^3 \mathrm{d}z_1$ en fonction de u_μ. Posons

$$w^k(y) = -X_\mu^k(y) + y_k \quad \text{et} \quad w_\varepsilon^k(z) = \varepsilon Q w^k \left(z_1, \frac{z_2}{\varepsilon}, \frac{z_3}{\varepsilon} \right),$$

où X_μ^k est définie par (1.12) et Q est le prolongement à Y donné par le Lemme 1.2 pour le domaine Y_μ^* (voir [7] pour plus de détails). Par des calculs simples, on montre (voir, par exemple [6], et [7]) que l'on a l'estimation

$$\left\| X_\mu^k \right\|_{H^1(Y_\mu^*)} \leq c,$$

avec c une constante indépendante de ε. On a alors $\|w^k\|_{H^1(Y_\mu^*)} \leq c$ et $\left\| w_\varepsilon^k \right\|_{H^1(Y)} \leq c$. On peut donc extraire une sous-suite telle que

$$w_\varepsilon^k \rightharpoonup z_k \quad \text{faiblement dans } H^1(\Omega). \tag{1.20}$$

On introduit les fonctions

$$\eta_i^k(y) = a_{ji} \frac{\partial \omega^k}{\partial y_j}, \quad \eta_{i\varepsilon}^k(z) = \eta_i^k \left(z_1, \frac{z_2}{\varepsilon}, \frac{z_3}{\varepsilon} \right),$$

définies respectivement par

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \eta_i^k}{\partial y_i} = 0 \quad \text{dans } Y_\mu^*, \\ \eta_i^k n_i = 0 \quad \text{sur } \partial_N Y_\mu^*, \\ \eta_i^k \text{ périodique en } y_2 \text{ et } y_3, \end{cases}$$

et (obtenu par une une mise à l'échelle)

$$\begin{cases} -\varepsilon^{-1}\dfrac{\partial\eta^k_{1\varepsilon}}{\partial z_1}-\dfrac{\partial\eta^k_{2\varepsilon}}{\partial z_2}-\dfrac{\partial\eta^k_{3\varepsilon}}{\partial z_3}=0 & \text{sur } \Omega^*_{\varepsilon\mu}, \\ \eta^k_{i\varepsilon}n_i=0 & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\mu}. \end{cases}$$

En utilisant la même technique de prolongement que celle pour ξ^i_ε, on en déduit

$$\begin{cases} -\varepsilon^{-1}\dfrac{\partial\widetilde{\eta^k_{1\varepsilon}}}{\partial z_1}-\dfrac{\partial\widetilde{\eta^k_{2\varepsilon}}}{\partial z_2}-\dfrac{\partial\widetilde{\eta^k_{3\varepsilon}}}{\partial z_3}=0 \qquad \text{dans } \Omega, \\ \widetilde{\eta^k_{i\varepsilon}}n_i=0 \qquad \text{sur } \partial\Omega\setminus(]0,1[\times]0,\ell[\times\{0\}). \end{cases} \tag{1.21}$$

On vérifie sans peine que l'on a les estimations $\left\|\eta^k_i\right\|_{L^2\left(Y^*_\mu\right)}\leq c$ et $\left\|\widetilde{\eta^k_{i\varepsilon}}\right\|_{L^2(\Omega)}\leq c$, indépendamment de ε. On a donc la convergence (à une sous-suite près)

$$\widetilde{\eta^k_{i\varepsilon}}\to\mathcal{M}_Y\left(\widetilde{\eta^k_i}\right) \qquad \text{faiblement dans } L^2(\Omega). \tag{1.22}$$

Soient $v\in\mathcal{D}(]0,T[)$ et $\varphi\in\mathcal{D}(]0,\ell[\times]0,L[))$. Multiplions la première équation de (1.18) par $v\,\varphi\,w^k_\varepsilon$ et intégrons par parties sur $\Omega\times]0,T[$. Il vient

$$\begin{aligned} &\int_0^T\Big(\int_\Omega P_{\varepsilon\mu}u''_{\varepsilon\mu}X_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}}\,v\,\varphi w^k_\varepsilon\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t+\int_0^T v\Big(\varepsilon^{-1}\int_\Omega\widetilde{\xi^1_{\varepsilon\mu}}\,\varphi\frac{\partial w^k_\varepsilon}{\partial z_1}\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t+\\ &\qquad+\int_0^T v\Big(\int_\Omega\widetilde{\xi^2_{\varepsilon\mu}}\,\varphi\frac{\partial w^k_\varepsilon}{\partial z_2}\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t+\int_0^T v\Big(\int_\Omega\widetilde{\xi^3_{\varepsilon\mu}}\,\varphi\frac{\partial w^k_\varepsilon}{\partial z_3}\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t+\\ &\qquad+\int_0^T v\Big(\int_\Omega\widetilde{\xi^2_{\varepsilon\mu}}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z_2}w^k_\varepsilon\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t+\int_0^T v\Big(\int_\Omega\widetilde{\xi^3_{\varepsilon\mu}}\,w^k_\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t=0. \end{aligned}$$

Multiplions $(1.21)_1$ par $v\varphi P_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu}$ et intégrons par parties sur $\Omega\times]0,T[$. Il vient

$$\begin{aligned} &\int_0^T v\Big(\varepsilon^{-1}\int_\Omega\widetilde{\eta^k_{1\varepsilon}}\,\varphi\,\frac{\partial P_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1}\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t+\int_0^T v\Big(\int_\Omega\widetilde{\eta^k_{2\varepsilon}}\,\varphi\,\frac{\partial P_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_2}\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t+\\ &\quad+\int_0^T v\Big(\int_\Omega\widetilde{\eta^k_{3\varepsilon}}\,\varphi\,\frac{\partial P_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu}}{\partial z_3}\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t+\int_0^T v\Big(\int_\Omega\widetilde{\eta^k_{2\varepsilon}}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z_2}\,P_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu}\,\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t+\\ &\quad+\int_0^T v\Big(\int_\Omega\widetilde{\eta^k_{3\varepsilon}}\,\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}\,P_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu}\,\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t=0. \end{aligned}$$

Par soustraction on a alors

$$\begin{aligned}
&\int_0^T v\Big(\int_\Omega \widetilde{\xi^2_{\varepsilon\mu}}\ \frac{\partial\varphi}{\partial z_2}\ w^k_\varepsilon\,\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t+\int_0^T v\Big(\int_\Omega \widetilde{\xi^3_{\varepsilon\mu}}\ \frac{\partial\varphi}{\partial z_3}\ w^k_\varepsilon\,\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t-\\
&\quad-\int_0^T v\Big(\int_\Omega \widetilde{\eta^k_{2\varepsilon}}\ \frac{\partial\varphi}{\partial z_2}\ P_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu}\,\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t-\int_0^T v\Big(\int_\Omega \widetilde{\eta^k_{3\varepsilon}}\ \frac{\partial\varphi}{\partial z_3}\ P_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu}\,\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t=\\
&\quad=-\int_0^T\Big(\int_\Omega \chi_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}}\ v''\ P_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu}\ \varphi w^k_\varepsilon\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

d'où, en passant à la limite avec $\varepsilon\to 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^T v\Big(\int_\Omega \xi^2_\mu\ \frac{\partial\varphi}{\partial z_2}\ z_k\,\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t+\int_0^T v\Big(\int_\Omega \xi^3_\mu\ \frac{\partial\varphi}{\partial z_3}\ z_k\,\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t-\\
&\quad-\int_0^T v\Big(\int_\Omega \mathcal{M}_Y\big(\widetilde{\eta^k_2}\big)\frac{\partial\varphi}{\partial z_2}u_\mu\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t-\int_0^T v\Big(\int_\Omega \mathcal{M}_Y\big(\widetilde{\eta^k_3}\big)\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}u_\mu\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t=\\
&\quad=-\int_0^T\int_\Omega \big|Y^*_\mu\big|\,v''\,u_\mu\ \varphi\ z_k\,\mathrm{d}z\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Intégrant par parties dans cette égalité donne

$$\int_0^T \xi^2_\mu\,\mathrm{d}z_1+\int_0^1 \xi^3_\mu\,\mathrm{d}z_1=\mathcal{M}_Y\big(\widetilde{\eta^k_2}\big)\frac{\partial u_\mu}{\partial z_2}+\mathcal{M}_Y\big(\widetilde{\eta^k_3}\big)\frac{\partial u_\mu}{\partial z_3},$$

ce qui, remplacé dans (1.19) permet d'écrire

$$\frac{\partial}{\partial z_l}\Big(\mathcal{M}_Y\big(\widetilde{\eta^k_l}\big)\ \frac{\partial u_\mu}{\partial z_\ell}\Big)=\big|Y^*_\mu\big|\,u''_\mu.$$

On pose alors

$$q^{kl}_\mu=\int_{Y^*_\mu}\eta^k_l\,\mathrm{d}y=\int_{Y^*_\mu}a_{ij}\frac{\partial\left(-X^k_\mu+y_k\right)}{\partial y_i}\ \frac{\partial\left(-X^l_\mu+y_l\right)}{\partial y_j}\,\mathrm{d}y,$$

ce qui est la formule (1.11). On retrouve ainsi la première équation de (1.10). Pour terminer la preuve du théorème, il reste à montrer que les deux dernières équations de (1.10) sont vérifiées.

Soient $\varphi\in\mathcal{D}(]0,\ell[\times]0,L[)$, $v\in\mathcal{D}(]0,T[)$ avec $v(T)=0$. Multiplions la première équation de (1.17) par φv et intégrons par parties sur $\Omega\times]0,T[$. Il vient

(1.23)

$$-\int_0^T\Big(\int_\Omega \widetilde{u'_{\varepsilon\mu}}\,v'\varphi\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t-\int_\Omega \widetilde{u'_{\varepsilon\mu}}\,(0)\ v\,(0)\,\varphi\mathrm{d}z+\int_0^T\Big(\int_\Omega \widetilde{\xi^\ell_\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial z_\ell}v\mathrm{d}z\Big)\,\mathrm{d}t=0,$$

où on va passer à la limite. Pour ce faire, on aura besoin de la limite de $\widetilde{u'_{\varepsilon\mu}}$ qui existe grâce aux hypothèses (1.8). Si $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $h \in \mathcal{D}(]0,T[)$ on a

$$\begin{aligned}\int_0^T \Big(\int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} u''_{\varepsilon\mu}\psi h \mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t &= \int_0^T \Big(\int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} u_{\varepsilon\mu}\psi h'' \mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^T \Big(\int_{\Omega} P_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu}\,\chi_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}}\psi h'' \mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{1.24}$$

Par ailleurs,
(1.25)
$$\int_0^T\Big(\int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} u''_{\varepsilon\mu}\psi h \mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t = \int_0^T\Big(\int_{\Omega}\widetilde{u''_{\varepsilon\mu}}\psi h \mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t = -\int_0^T \Big(\int_{\Omega}\widetilde{u'_{\varepsilon\mu}}\psi h' \mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t.$$

De (1.24) et (1.25) on a

$$\int_0^T \Big(\int_{\Omega} P_{\varepsilon\mu}u_{\varepsilon\mu}.X_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}}\psi h'' \mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t = -\int_0^T \Big(\int_{\Omega}\tilde{u}'_{\varepsilon\mu}\psi h' \mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t,$$

ce qui donne à la limite

$$\int_0^T \Big(\int_{\Omega}\left|Y^*_\mu\right|\; u_\mu\;\psi\; h''\,\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t = -\int_0^T \Big(\int_{\Omega} u'_\mu\;\psi\; h'\,\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t.$$

Une intégration par parties implique que l'on a

$$-\int_0^T \Big(\int_{\Omega}\left|Y^*_\mu\right|\; u'_\mu\;\psi\; h'\,\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t = -\int_0^T \Big(\int_{\Omega} u'_\mu\;\psi h'\,\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t,$$

d'où

$$\widetilde{u'_{\varepsilon\mu}} \rightharpoonup \left|Y^*_\mu\right| u'_\mu \quad \text{faible} * \text{ dans } L^\infty(0,T;\, L^2(\Omega)).$$

Passant alors à la limite dans (1.23), il vient

$$-\int_0^T \Big(\int_{\Omega}\left|Y^*_\mu\right| u'_\mu\; v'\;\varphi\,\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t - \int_{\Omega} u^1_\mu v\,(0)\;\varphi\,\mathrm{d}z + \int_0^T \Big(\int_{\Omega}\xi^\ell_\mu\frac{\partial\varphi}{\partial z_\ell}v\,\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}t = 0,$$

d'où, en intégrant par parties sur $\Omega\times]0,T[$,

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\Omega}\left|Y^*_\mu\right| u''_\mu\; v'\;\varphi\;\mathrm{d}z\mathrm{d}t + \int_{\Omega}\left|Y^*_\mu\right| u'_\mu\,(0)\,v\,(0)\;\varphi\;\mathrm{d}z - \int_{\Omega} u^1_\mu\; v\,(0)\;\varphi\;\mathrm{d}z - \\ -\int_0^T v\Big(\int_0^L\int_0^\ell\frac{\partial}{\partial z_\ell}\Big(\int_0^1\xi^\ell_\mu \mathrm{d}z_1\Big)\varphi \mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3\Big)\mathrm{d}t = 0.\end{aligned}$$

En vertu de (1.25), on a alors

$$\int_{\Omega}\left|Y^*_\mu\right| u'_\mu\,(0)\;\;v'\,(0)\;\;\varphi\,\mathrm{d}z - \int_{\Omega} u^1_\mu\; v\,(0)\;\;\varphi\,\mathrm{d}z = 0,$$

d'où on déduit aisement

$$u'_\mu(0) = \frac{1}{|Y^*_\mu|}\int_0^1 u^1_\mu \,\mathrm{d}z_1.$$

Il reste à prouver que la dernière équation de (1.10) est verifiée. Pour cela, soient $\varphi \in \mathcal{D}(]0,\ell[\times]0,L[)$ et $v \in \mathcal{D}(]0,T[)$ avec $v'(T) = 0$ et $v'(0) \neq 0$. Multiplions (1.12) par $\varphi\, v$ et intégrons deux fois par parties par rapport à t. On obtient

$$\int_0^T \int_\Omega \widetilde{u_{\varepsilon\mu}}\, v''\, \varphi \,\mathrm{d}z\mathrm{d}t + \int_\Omega \widetilde{u_{\varepsilon\mu}}(0)\; v'(0)\; \varphi \,\mathrm{d}z + \int_0^T \int_\Omega \widetilde{\xi^\ell_\varepsilon}\, \frac{\partial \varphi}{\partial z_\ell}\, v \,\mathrm{d}z\mathrm{d}t = 0,$$

ou bien

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega \chi_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}}\, P_{\varepsilon\mu} u_{\varepsilon\mu}\, v''\, \varphi \,\mathrm{d}z\mathrm{d}t + \int_\Omega \chi_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}}\; P_{\varepsilon\mu} u_{\varepsilon\mu}\,(0)\; \varphi\, v'(0)\; \mathrm{d}z + \\ + \int_0^T \left(\int_\Omega \widetilde{\xi^\ell_\varepsilon}\, \frac{\partial \varphi}{\partial z_\ell}\; v\; \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}t = 0.\end{aligned} \tag{1.26}$$

Pour y passer à la limite, on remarque que $P_{\varepsilon\mu} u_{\varepsilon\mu}\,(0) = Q_{\varepsilon\mu} u^0_{\varepsilon\mu}$, où $Q_{\varepsilon\mu}$ est le prolongement donné par le Lemme 2.1. Or $\chi_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} Q_{\varepsilon\mu} u^0_{\varepsilon\mu} = \widetilde{u^0_{\varepsilon\mu}}$. Alors, par le Théorème 2.3, on a la convergence

$$\widetilde{u^0_{\varepsilon\mu}} \rightharpoonup u^0_\mu \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega)\,.$$

Par conséquent,

$$Q_{\varepsilon\mu} u^0_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup \frac{u^0_\mu}{|Y^*_\mu|} \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega)\,.$$

En passant à la limite dans (1.26), on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^T \Big(\int_\Omega |Y^*_\mu|\; u_\mu v'' \varphi \,\mathrm{d}z \Big) \mathrm{d}t + \int_\Omega |Y^*_\mu|\; \frac{u^0_\mu}{|Y^*_\mu|}\; \varphi\; v'\,(0)\; \mathrm{d}z + \\ + \int_0^T \Big(\int_\Omega \xi^l_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z_l}\; v \,\mathrm{d}z \Big) \mathrm{d}t = 0.\end{aligned}$$

En procédant comme auparavant, on a

$$- \int_\Omega |Y^*_\mu|\; u_\mu(0)\; v'(0)\; \varphi\; \mathrm{d}z + \int_\Omega u^0_\mu\; \varphi\; v'(0) \,\mathrm{d}z = 0, \tag{1.27}$$

avec u^0_μ dépendant uniquement de z_2 et z_3. De même, on a les estimations

$$\left\| u^0_{\varepsilon\mu} \right\|_{H^1(\Omega^*_{\varepsilon\mu})} \leq c, \qquad \left\| \widetilde{u^0_{\varepsilon\mu}} \right\|_{H^1(\Omega)} \leq c, \qquad \left\| \frac{\partial u^0_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} \right\| \leq c\, \varepsilon,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial \widetilde{u^0_{\varepsilon\mu}}}{\partial z_1} \rightharpoonup \frac{u^0_\mu}{\partial z_1} \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega) \text{ avec } \frac{\partial u^0_\mu}{\partial z_1} = 0.$$

Finalement, (1.27) donne $u_\mu(0) = u^0_\mu / \left|Y^*_\mu\right|$, ce qui termine la preuve. $\square$

2. CONTRÔLABILITÉ EXACTE ET CONVERGENCE DES CONTRÔLES LORSQUE $\varepsilon \to 0$

2.1. Position du problème

Avec les mêmes notations qu'au premier chapitre et dans le même cadre géométrique, on considère le système

$$\begin{cases} u''_{\varepsilon\mu} + A_{\varepsilon\mu} u_{\varepsilon\mu} = v_{\varepsilon\mu} \quad \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \times]0,T[\,, \\ u_{\varepsilon\mu} = 0 \quad \text{sur } \Omega^{*,0}_{\varepsilon\mu} \times]0,T[\,, \\ \left(\varepsilon^{-1} a_{i1} \dfrac{\partial \mu_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} + a_{i\ell} \dfrac{\partial \mu_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell}\right)\nu_i = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\mu} \times]0,T[\,, \\ u_{\varepsilon\mu}(0) = u^0_{\varepsilon\mu} \quad \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}, \\ u'_{\varepsilon\mu}(0) = u^1_{\varepsilon\mu} \quad \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $v_{\varepsilon\mu}$ est le contrôle que nous nous proposons de déterminer de manière à avoir

$$u_{\varepsilon\mu}(T) = u'_{\varepsilon\mu}(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}.$$

Nous allons tout d'abord montrer qu'un tel contrôle existe et ensuite nous allons étudier son comportement lorsque ε et μ tendent vers zéro.

2.2. Contrôlabité exacte par HUM

Cette étude est guidée par la méthode HUM, introduite par J.L. Lions [11]. Prenons $\left\{u^0_{\varepsilon\mu}, u^1_{\varepsilon\mu}\right\}$ dans $V_\varepsilon \times L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)$, où $V_{\varepsilon\mu}$ est l'espace

$$V_{\varepsilon\mu} = \left\{u_{\varepsilon\mu} \in H^1\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right);\ u_{\varepsilon\mu} = 0,\ \text{sur } \partial\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right\},$$

muni de la norme $\|\varphi\|_{V_{\varepsilon\mu}} = \|\nabla\varphi\|_{[L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu})]^3}$, $\forall \varphi \in V_{\varepsilon\mu}$.

Considérons le couple $\{\varphi_{\varepsilon\mu},\psi_{\varepsilon\mu}\}$, où $\varphi_{\varepsilon\mu}$ satisfait le système

$$\begin{cases} \varphi''_{\varepsilon\mu}+A_{\varepsilon\mu}\varphi_{\varepsilon\mu}=0 \quad \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}\times\,]0,T[\,, \\ \varphi_{\varepsilon\mu}=0 \quad \text{dans } \Omega^{*,0}_{\varepsilon\mu}\times\,]0,T[\,, \\ \dfrac{\partial\varphi_{\varepsilon\mu}}{\partial\upsilon_{A_{\varepsilon\mu}}}=0 \quad \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\mu}\times\,]0,T[\,, \\ \varphi_{\varepsilon\mu}(0)=\varphi^0_{\varepsilon\mu} \quad \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}, \\ \varphi'_{\varepsilon\mu}(0)=\varphi^1_{\varepsilon\mu} \quad \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}, \end{cases} \tag{2.2}$$

alors que $\psi_{\varepsilon\mu}$ vérifie

$$\begin{cases} \psi''_{\varepsilon\mu}+A_{\varepsilon\mu}\psi_{\varepsilon\mu}=-\varphi_{\varepsilon\mu} \quad \Omega^*_{\varepsilon\mu}\times\,]0,T[\,, \\ \psi_{\varepsilon\mu}=0 \quad \text{dans } \Omega^{*,0}_{\varepsilon\mu}\times\,]0,T[\,, \\ \dfrac{\partial\psi_{\varepsilon\mu}}{\partial\nu_{A_{\varepsilon\mu}}}=0 \quad \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\mu}\times\,]0,T[\,, \\ \psi_{\varepsilon\mu}(T)=0 \quad \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}, \\ \psi'_{\varepsilon\mu}(T)=0 \quad \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}. \end{cases} \tag{2.3}$$

La solution $\varphi_{\varepsilon\mu}$ de (2.2) est caractérisée par le lemme suivant de [11] (voir aussi [10]).

Lemme 2.2. *Lorsque $\left\{\varphi^0_{\varepsilon\mu},\varphi^1_{\varepsilon\mu}\right\}$ appartient à $L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)\times V'_{\varepsilon\mu}$, la solution $\varphi_{\varepsilon\mu}$ de (2.2) est telle que*

$$\varphi_{\varepsilon\mu}\in C\left([0,T],L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)\right)\cap C\big([0,T];V'_{\varepsilon\mu}\big).$$

De plus, il existe deux constantes strictement positives c_1 et c_2, independantes de ε avec

$$c_1\Big(\left\|\varphi^0_{\varepsilon\mu}\right\|^2_{L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)}+\left\|\varphi^1_{\varepsilon\mu}\right\|^2_{V'_{\varepsilon\mu}}\Big)\le\left\|\varphi_{\varepsilon\mu}\right\|^2_{L^2\left(0,T,L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)\right.}\le$$
$$\le c_2\Big(\left\|\varphi^0_{\varepsilon\mu}\right\|^2_{L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)}+\left\|\varphi'_{\varepsilon\mu}\right\|^2_{V'_{\varepsilon\mu}}\Big).$$

On peut maintenant formuler le résultat de contrôlabilité exacte.

Théorème 2.3. *Pour tout $T>0$ et pour tout couple de données initiales du système (2.1) vérifiant*

$$\left\{u^0_{\varepsilon\mu},u^1_{\varepsilon\mu}\right\}\in V^*_{\varepsilon\mu}\times L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right),$$

il existe un contrôle interne $v_{\varepsilon\mu}\in L^2(0,T,L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right)$ tel que si $u_{\varepsilon\mu}$ est la solution de (2.1), alors $u_{\varepsilon\mu}$ vérifie

$$u_{\varepsilon\mu}(T)=u'_{\varepsilon\mu}(T)=0 \quad \textit{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}. \tag{2.4}$$

Preuve. Posons $F_{\varepsilon\mu} = L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right) \times V'_{\varepsilon\mu}$, $F'_{\varepsilon\mu} = L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\mu}\right) \times V_{\varepsilon\mu}$ et définissons l'application $\Lambda_{\varepsilon\mu} : F_{\varepsilon\mu} \to F'_{\varepsilon\mu}$ par

$$\Lambda_{\varepsilon\mu}\left\{\varphi^0_{\varepsilon\mu}, \varphi^1_{\varepsilon\mu}\right\} = \left\{\psi'_{\varepsilon\mu}(0), -\psi_{\varepsilon\mu}(0)\right\}, \tag{2.5}$$

où $\psi_{\varepsilon\mu}$ est la solution de (2.2).

Multipliant la première equation de (2.2) par $\varphi_{\varepsilon\mu}$, intégrant par parties sur $\Omega^*_{\varepsilon\mu} \times]0, T[$ et utilisant (2.5), il vient

$$\left\langle \Lambda_{\varepsilon\mu}\left(\varphi^0_{\varepsilon\mu}, \varphi^1_{\varepsilon\mu}\right), \left(\varphi^0_{\varepsilon\mu}, \varphi^1_{\varepsilon\mu}\right)\right\rangle = \int_0^T \left(\int_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}} \varphi^2_{\varepsilon\mu} \mathrm{d}z\right) \mathrm{d}t,$$

où $\varphi_{\varepsilon\mu}$ est la solution de (2.1). On a alors, en appliquant le Lemme 2.2,

$$c_1 \left\|\left\{\varphi^0_{\varepsilon\mu}, \varphi^1_{\varepsilon\mu}\right\}\right\|_{F_{\varepsilon\mu}} \leq \left\|\Lambda_{\varepsilon\mu}\left(\varphi^0_{\varepsilon\mu}, \varphi^1_{\varepsilon\mu}\right)\right\|_{F'_{\varepsilon\mu}} \leq c_2 \left\|\left\{\varphi^0_{\varepsilon\mu}, \varphi^1_{\varepsilon\mu}\right\}\right\|_{F_{\varepsilon\mu x}},$$

d'où on déduit que $\Lambda_{\varepsilon\mu}$ est un isomorphisme de $F_{\varepsilon\mu}$ sur $F'_{\varepsilon\mu}$, uniformément par rapport à ε. Comme $\left\{u^0_{\varepsilon\mu}, u^1_{\varepsilon\mu}\right\} \in F'_{\varepsilon\mu}$, l'équation

$$\Lambda_{\varepsilon\mu}\left(\varphi^0_{\varepsilon\mu}, \varphi^1_{\varepsilon\mu}\right) = \left\{u^1_{\varepsilon\mu}, -\, u^0_{\varepsilon\mu}\right\}$$

possède une et une seule solution dans $F_{\varepsilon\mu}$. De la définition de $\Lambda_{\varepsilon\mu}$, on a

$$\psi'_{\varepsilon\mu}(0) = u^1_{\varepsilon\mu}, \quad \psi_{\varepsilon\mu}(0) = u^0_{\varepsilon\mu}.$$

Si l'on pose $v_{\varepsilon\mu} = -\varphi_{\varepsilon\mu}$, on voit que $\psi_{\varepsilon\mu}$ est la solution du système (2.1). Ce système n'admettant qu'une solution unique, à savoir $u_{\varepsilon\mu}$, on doit avoir $\psi_{\varepsilon\mu} = u_{\varepsilon\mu}$, d'où (2.4), ce qui achève la preuve du Théorème 2.3. □

2.3. **Limite pour** $\varepsilon \to 0$

Dans ce paragraphe, on fait tendre ε vers zéro. Nous allons montrer que la suite des contrôles converge vers une fonction qui est le contrôle exact du système homogénéisé.

Théorème 2.4. *On suppose que les donnés initiales de* (2.1) *vérifient*

$$\begin{cases} \left\|u^0_{\varepsilon\mu}\right\|_{V_{\varepsilon\mu}} \leq c \text{ et } \widetilde{u^0_{\varepsilon\mu}} \to u^0_\mu \text{ faiblement dans } L^2(\Omega), \\ \left\|u^1_{\varepsilon\mu}\right\|_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu})} \leq c \text{ et } \widetilde{u^1_{\varepsilon\mu}} \to u^1_\mu \text{ faiblement dans } L^2(\Omega), \end{cases} \tag{2.6}$$

où le $\sim$ désigne le prolongement par zéro de toute fonction définie dans $\Omega^*_{\varepsilon\mu}$ et c est une constante positive indépendante de ε. Soit $v_{\varepsilon\mu}$ le contrôle exact donné par HUM du système (2.1). *Alors, lorsque ε tend vers zéro, on a*

$$\widetilde{v}_{\varepsilon\mu} \to v_\mu \quad \text{faiblement dans } L^2(]0, T[\,, L^2(\Omega)),$$

où v_μ est le contrôle exact du système homogénéisé

$$
(2.7) \qquad \begin{cases}
\left|Y_\mu^*\right| u_\mu'' - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(a_\mu^{k\ell} \dfrac{\partial u_\mu}{\partial z_\ell}\right) = v_\mu \quad \textit{dans }]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[, \\
u_\mu = 0 \quad \textit{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[\right), \\
u_\mu(0) = \dfrac{u_\mu^0}{\left|Y_\mu^*\right|} \quad \textit{dans }]0,\ell[\times]0,L[, \\
u_\mu'(0) = \dfrac{1}{\left|Y_\mu^*\right|} \displaystyle\int_0^1 u_\mu^1 \mathrm{d}z_1 \quad \textit{dans }]0,\ell[\times]0,L[.
\end{cases}
$$

De plus, si $P_{\varepsilon\mu}$ est l'opérateur de prolongement du Lemme 2.1*, on a*

$$
(2.8) \qquad \begin{cases}
P_{\varepsilon\mu} u_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup u_\mu \quad \textit{faible} * \textit{ dans } L^\infty(]0,T[\,, H_0^1(\Omega)), \\
P_{\varepsilon\mu} u_{\varepsilon\mu}' \rightharpoonup u_\mu' \quad \textit{faible} * \textit{ dans } L^\infty(]0,T[\,, L^2(\Omega)).
\end{cases}
$$

Preuve. Observons qu'en fait on doit étudier la convergence de $\varphi_{\varepsilon\mu}$ car $v_{\varepsilon\mu} = -\varphi_{\varepsilon\mu}$. Dans une première étape, nous obtenons des estimations a priori. En vertu de (2.2), (2.3), du Lemme 2.3 et de (2.6), on a l'existence d'une constante positive C, indépendante de ε, telle que

$$
(2.9) \qquad \left\|\varphi_{\varepsilon\mu}^0\right\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\mu}^*)} \leq C, \quad \left\|\varphi_{\varepsilon\mu}^1\right\|_{V_{\varepsilon\mu}'} \leq C, \quad \left\|\varphi_{\varepsilon\mu}\right\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\mu}^*\times]0,T[)} \leq C,
$$

ce qui implique les convergences

$$
(2.10) \qquad \begin{cases}
\widetilde{\varphi_{\varepsilon\mu}^0} \rightharpoonup \varphi_\mu^0 \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega), \\
\widetilde{\varphi_{\varepsilon\mu}} \rightharpoonup \varphi_\mu \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)).
\end{cases}
$$

Pour monter que φ_μ vérifie le problème limite, on va régulariser le système (2.2). Pour cela, introduisons $\tau_{\varepsilon\mu} \in V_{\varepsilon\mu}$, solution du système

$$
(2.11) \qquad \begin{cases}
A_{\varepsilon\mu}\tau_{\varepsilon\mu} = -\varphi_{\varepsilon\mu}^1 \quad \text{dans } \Omega_{\varepsilon\mu}^*, \\
\dfrac{\partial \tau_{\varepsilon\mu}}{\partial \nu_{A_{\varepsilon\mu}}} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_{\varepsilon\mu}^* \setminus \Omega_{\varepsilon\mu}^{*,0}, \\
\tau_{\varepsilon\mu} = 0 \quad \text{sur } \Omega_{\varepsilon\mu}^{*,0},
\end{cases}
$$

et posons

$$
(2.12) \qquad \gamma_{\varepsilon\mu}(z,t) = \int_0^t \varphi_{\varepsilon\mu}(z,s)\,\mathrm{d}s + \tau_{\varepsilon\mu}.
$$

On vérifie maintenant que $\gamma_{\varepsilon\mu}$ est solution du problème

$$\begin{cases} \gamma''_{\varepsilon\mu} + A_{\varepsilon\mu}\gamma_{\varepsilon\mu} = 0 \quad \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu} \times]0,T[\,, \\ \gamma_{\varepsilon\mu} = 0 \quad \text{sur } \Omega^{*,0}_{\varepsilon\mu}, \\ \dfrac{\partial\gamma_{\varepsilon\mu}}{\partial\nu_{A_{\varepsilon\mu}}} = 0 \quad \text{sur } \left(\partial\Omega^*_{\varepsilon\mu} \setminus \Omega^{*,0}_{\varepsilon\mu}\right), \\ \gamma_{\varepsilon\mu}(0) = \tau_{\varepsilon\mu} \quad \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}, \\ \gamma'_{\varepsilon\mu}(0) = \varphi^0_{\varepsilon\mu} \quad \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}. \end{cases} \tag{2.13}$$

Ceci est assuré par le résultat suivant demontré dans l'appendice.

Lemme 2.5. *Soit Ω_ε un domaine perforé par des trous ε-périodiques. Soit $f_\varepsilon \in V'_\varepsilon$. On suppose qu'il existe une constante c, positive et indépendante de ε, telle que $\|f_\varepsilon\|_{v'_\varepsilon} \leq c$. Soit $\tau_\varepsilon \in v_\varepsilon$ la solution du problème*

$$\begin{cases} A_\varepsilon\tau_\varepsilon = f_\varepsilon \quad \textit{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial\tau_\varepsilon}{\partial\nu_{A_{\varepsilon\mu}}} = 0 \quad \textit{sur la frontière des trous}, \\ \tau_\varepsilon = 0 \quad \textit{sur le bord exérieur de } \Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

où A_ε est un opérateur dont la matrice des coefficients vérifie (1.2). *Alors, il existe $f^* \in H^{-1}(\Omega)$ et une sous-suite extraite de ε, encore notée ε, telle que si Q_ε est l'opérateur de prolongement du Lemme* 2.1, *on a $Q_\varepsilon\tau_\varepsilon \rightharpoonup \tau$ faiblement dans $H^1_0(\Omega)$, avec τ vérifiant $A\tau = f^*$ dans Ω, où A est l'operateur homogénéisé correspondant à A_ε.*

Grâce au Lemme 2.5, on sait que si $\tau_{\varepsilon\mu}$ est solution de (2.11) alors

$$Q_{\varepsilon\mu}\tau_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup \tau_\mu \quad \text{faiblement dans } H^1_0(\Omega)\,,$$

et il existe $\varphi^{1,*}_\mu \in H^{-1}(\Omega)$ tel que

$$-\frac{\partial}{\partial z_k}\Big(a^{k\ell}_\mu \frac{\partial\tau_\mu}{\partial z_\ell}\Big) = -\varphi^{1,*}_\mu \quad \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\,.$$

Par (2.12) et comme par hypothèse, $\tau_{\varepsilon\mu}$ est indépendant de t, on a

$$\begin{cases} \gamma'_{\varepsilon\mu}(z,t) = \varphi_{\varepsilon\mu}(z,t)\,, \\ \gamma''_{\varepsilon\mu}(z,t) = \varphi'_{\varepsilon\mu}(z,t)\,. \end{cases} \tag{2.14}$$

D'autre part

$$A_{\varepsilon\mu}\gamma_{\varepsilon\mu}(z,t) = \int_0^t A_{\varepsilon\mu}\varphi_{\varepsilon\mu}(z,s)\,\mathrm{d}s + A_{\varepsilon\mu}\tau_{\varepsilon\mu},$$

et en utilisant $(2.11)_1$ et $(2.13)_2$ on a

$$A_{\varepsilon\mu}\gamma_{\varepsilon\mu}\,(z,t)=\int_0^t\varphi''_{\varepsilon\mu}\,(z,s)\,\mathrm{d}s-\varphi^1_{\varepsilon\mu},$$

d'où $A_{\varepsilon\mu}\gamma_{\varepsilon\mu}+\gamma''_{\varepsilon\mu}=0$. De plus, $(2.1)_2$ et $(2.12)_3$ donnent $\gamma_{\varepsilon\mu}=0$ sur $\Omega^{*,0}_{\varepsilon\mu}$. Enfin, grâce à $(2.1)_3$ et à $(2.13)_2$, il vient

$$\frac{\partial\gamma_{\varepsilon\mu}}{\partial\nu_{A_{\varepsilon\mu}}}=0\quad\text{ sur }\partial\Omega^*_{\varepsilon\mu}\setminus\Omega^{*,0}_{\varepsilon\mu}\tag{2.15}$$

Alors, de (2.11) et (2.12) on obtient

$$\gamma_{\varepsilon\mu}(0)=\tau_{\varepsilon\mu},\quad\gamma'_{\varepsilon\mu}(0)=\varphi^0_{\varepsilon\mu},$$

ce qui montre que $\gamma_{\varepsilon\mu}$ est solution du système (2.13).

Appliquons le Théorème 1.4 au système (2.13). Pour ce faire, on aura besoin des assertions suivantes:

$$\|\tau_{\varepsilon\mu}\|_{V_{\varepsilon\mu}}\leq c\text{ et }\widetilde{\tau_{\varepsilon\mu}}\text{ converge faiblement dans }L^2(\Omega).$$

Pour les montrer, on multiplie $(2.11)_1$ par $\tau_{\varepsilon\mu}\in V_{\varepsilon\mu}$. En intégrant par parties, on obtient

$$\|\tau_{\varepsilon\mu}\|^2=\left\langle-\varphi^1_{\varepsilon\mu},\tau_{\varepsilon\mu}\right\rangle_{V'_{\varepsilon\mu},V_{\varepsilon\mu}},$$

d'où

$$\|\tau_{\varepsilon\mu}\|_{V_{\varepsilon\mu}}\leq\left\|\varphi^1_{\varepsilon\mu}\right\|_{V'_{\varepsilon\mu,}}.$$

Ensuite, grâce à $(2.9)_2$, on a

$$\|\tau_{\varepsilon\mu}\|_{V_{\varepsilon\mu}}\leq c.\tag{2.16}$$

La coercivité des coefficients a_{ij} donne l'estimation

$$\|\nabla\tau_{\varepsilon\mu}\|_{\ L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu})}\leq c,$$

d'où, par l'inégalité de Poincaré, on a

$$\|\tau_{\varepsilon\mu}\|_{\ L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu})}\leq c.$$

Alors, par le Lemme 2.1, on a la convergence

$$\varphi_{\varepsilon\mu}\tau_{\varepsilon\mu}\rightharpoonup\tau_\mu\quad\text{faiblement dans }H^1_0(\Omega).$$

Puisque

$$\varphi_{\varepsilon\mu}\tau_{\varepsilon\mu}\chi_{\Omega^*_{\varepsilon\mu}}=\widetilde{\tau_{\varepsilon\mu}},$$

on a immédiatement

$$\widetilde{\tau_{\varepsilon\mu}}\rightharpoonup\left|Y^*_\mu\right|\tau_\mu\quad\text{ faiblement dans }L^2(\Omega).\tag{2.17}$$

En utilisant (2.9), (2.10), (2.16), (2.17) et le Théorème 2.3, on a

$$P_{\varepsilon\mu}\gamma_{\varepsilon\mu}\rightharpoonup\gamma_\mu\quad\text{ faiblement dans }L^\infty(0,T,H^1(\Omega)),$$

où γ_μ est indépendante de z_1 et vérifie

$$
(2.18)\qquad \begin{cases}
\left|Y_\mu^*\right| \gamma_\mu'' - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\Big(q_\mu^{kl} \dfrac{\partial \gamma_\mu}{\partial z_l}\Big) = 0 \quad \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[\,,\\
\gamma_\mu = 0 \quad \text{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\right),\\
\gamma_\mu(0) = \tau_\mu \quad \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\,,\\
\gamma_\mu'(0) = \left|Y_\mu^*\right| \displaystyle\int_0^1 \varphi_\mu^0 \,\mathrm{d}z_1 \quad \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\,.
\end{cases}
$$

Comme

$$
\widetilde{u_{\varepsilon\mu}'} \rightharpoonup \left|Y_\mu^*\right| u_\mu' \quad \text{faible} * \text{ dans } L^\infty(0,T,L^2(\Omega)),
$$

il vient

$$
\widetilde{\varphi_{\varepsilon\mu}} = \widetilde{\gamma_{\varepsilon\mu}'} \rightharpoonup \gamma_\mu' \left|Y_\mu^*\right|
$$

et par $(2.10)_2$ on a $\widetilde{\varphi_{\varepsilon\mu}} \rightharpoonup \varphi_\mu$, d'où

$$
\varphi_\mu = \left|Y_\mu^*\right| \gamma_\mu', \quad \varphi_\mu(0) = \left|Y_\mu^*\right| \gamma_\mu'(0) = \int_0^1 \varphi_\mu^0 \,\mathrm{d}z_1.
$$

De la même manière, on a aussi

$$
\varphi_\mu'(0) = \left|Y_\mu^*\right| \gamma_\mu''(0) = \frac{\partial}{\partial z_k}\Big(q_\mu^{k\ell} \frac{\partial \gamma_\mu'(0)}{\partial z_\ell}\Big) = \frac{\partial}{\partial z_k}\Big(q_\mu^{k\ell} \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell}\Big),
$$

et, par conséquent,

$$
(2.19)\qquad \varphi_\mu'(0) = \varphi_\mu^{1,*}.
$$

De plus,

$$
\begin{cases}
\left|Y_\mu^*\right| \gamma_\mu'' - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\Big(q_\mu^{k\ell} \dfrac{\partial \gamma_\mu}{\partial z_\ell}\Big) = 0,\\
\varphi_\mu' - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\Big(q_\mu^{k\ell} \dfrac{\partial \gamma_\mu}{\partial z_\ell}\Big) = \varphi_\mu'' - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\Big(q_\mu^{k\ell} \dfrac{\partial \gamma_\mu'}{\partial z_\ell}\Big) = 0,\\
\left|Y_\mu^*\right| \varphi_\mu'' - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\Big(q_\mu^{k\ell} \dfrac{\partial \varphi_\mu}{\partial z_\ell}\Big) = 0,
\end{cases}
$$

d'où, grâce à (2.19), (2.20) et (2.18), on a

$$
(2.20)\qquad \begin{cases}
\left|Y_\mu^*\right| \varphi_\mu'' - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\Big(q_\mu^{k\ell} \dfrac{\partial \varphi_\mu}{\partial z_\ell}\Big) = 0 \quad \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[\,,\\
\varphi_\mu = 0 \quad \text{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\right),\\
\varphi_\mu(0) = \displaystyle\int_0^1 \varphi_\mu^0 \,\mathrm{d}z_1 \quad \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\,,\\
\varphi_\mu'(0) = \varphi_\mu^{1,*} \quad \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\,.
\end{cases}
$$

D'après le Théorème 3.4, il s'ensuit que $v_\mu = -\varphi_\mu$. Montrons que le système homogénéisé (2.7) est exactement contrôlable avec v_μ. De (2.3), (2.8), (2.21), on a

$$\begin{cases} P_{\varepsilon\mu}\psi_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup \psi_\mu & \text{faible} * \text{ dans } L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \\ P_{\varepsilon\mu}\psi'_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup \psi'_\mu & \text{faible} * \text{ dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right). \end{cases}$$

Par le raisonnement de la preuve du Théorème 2.3, on aboutit au système limite

$$\begin{cases} \left|Y_\mu^*\right| \psi''_\mu - \dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{kl}\dfrac{\partial \psi_\mu}{\partial z_l}\right) = -\varphi_\mu & \text{dans }]0,l[\times]0,L[\times]0,T[, \\ \psi_\mu = 0 \quad \text{sur } \partial\left(]0,l[\times]0,L[\right)\times]0,T[, \\ \psi_\mu(T) = 0 \quad \text{dans }]0,l[\times]0,L[, \\ \psi'_\mu(T) = 0 \quad \text{dans }]0,l[\times]0,L[\end{cases}$$

avec $u_\mu = \psi_\mu$ et $u_\mu(T) = u'_\mu(T) = 0$, et ceci conclut la preuve du théorème. □

Remarque 2.6. Une application de la méthode HUM au système (2.7) permet de construire l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu : L^2&\left(]0,l[\times]0,L[\right)\times H^{-1}\left(]0,l[\times]0,L[\right) \\ &\to L^2\left(]0,l[\times]0,L[\right)\times H_0^1\left(]0,l[\times]0,L[\right), \\ \Lambda_\mu : &\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^1\right) \mapsto \left(\widetilde{u}_\mu^1|Y_\mu^*|, -u_\mu^1|Y_\mu^*|\right). \end{aligned}$$

En effectuant les mêmes calculs que ceux du paragraphe précédent, on obtient

$$\left|Y_\mu^*\right| \int_0^L\int_0^l \left(\psi'_\mu(0), -\psi_\mu(0)\right)\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^1\right)\,\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3 = \int_0^L\int_0^l \varphi_\mu^2\,\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3,$$

et Λ_μ est défini par

$$\Lambda_\mu\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^1\right) = \left(\psi'_\mu(0), -\psi_\mu(0)\right),$$

d'où

$$\left\langle \Lambda_\mu\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^1\right), \left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^1\right)\right\rangle = \frac{1}{\left|Y_\mu^*\right|}\int_0^L\int_0^l \varphi_\mu^2\,\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3.$$

Alors, le Lemme 2.2 donne

$$c\left(\left\|\varphi_\mu^0\right\|^2 + \left\|\varphi_\mu^1\right\|^2\right) \le \left|Y_\mu^*\right| \left\langle \Lambda_\mu\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^1\right), \left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^1\right)\right\rangle.$$

On en déduit

$$\left\|\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^1\right)\right\| \le \left|Y_\mu^*\right| \left\|\Lambda_\mu\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^1\right)\right\|$$

et, finalement,

$$\left\|\Lambda_\mu\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^1\right)\right\| \le c\left\|\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^1\right)\right\|.$$

Il s'ensuit que Λ_μ est un isomorphisme. Alors, l'équation

$$\left(\frac{\widetilde{u}_\mu^1}{|Y_\mu^*|}, -\frac{u_\mu^1}{|Y_\mu^*|}\right) = \Lambda_\mu\left(\varphi_\mu^0, \varphi_\mu^1\right) = \left(\psi_\mu'(0), -\psi_\mu(0)\right)$$

a une unique solution dans $L^2\left(]0,l[\times]0,L[\right)\times H^{-1}\left(]0,l[\times]0,L[\right)$. Par conséquent,

$$\widetilde{v_{\varepsilon\mu}} \rightharpoonup v_\mu \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

avec v_μ cântrole exact du système (2.7).

3. CONVERGENCE DES CONTRÔLES LORSQUE $\mu \to 0$

3.1. Limite de u_μ

Nous allons étudier le comportement asymptotique de u_μ lorsque μ tend vers zéro, ainsi que la stabilité des contrôles par rapport à ce passage à la limite.

Proposition 3.1. *L'énergie E du système* (2.7) *vérifie*

$$E_\mu(T) = E_\mu(0), \quad \forall T > 0, \tag{3.1}$$

i.e., on a conservation de l'énergie.

Preuve. En multipliant la premiere équation de (2.7) par u_μ' et en intégrant par parties sur $\Omega\times]0,T[$, on trouve

$$\int_0^L\int_0^\ell\int_0^T 2\mu\,(3-\mu)\,u_\mu' u_\mu'' \mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3\mathrm{d}t - q_\mu^{k\ell}\int_0^L\int_0^\ell\int_0^T u_\mu'\frac{\partial}{\partial z_k}\Big(\frac{\partial u_\mu}{\partial z_\ell}\Big)\,\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3\mathrm{d}t = 0,$$

ce qui implique

$$\mu\,(3-\mu)\int_0^L\int_0^\ell\int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u_\mu'\right)^2\mathrm{d}t\mathrm{d}z + \frac{1}{2}q_\mu^{k\ell}\int_0^L\int_0^\ell\int_0^T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial u_\mu}{\partial z_\ell}\frac{\partial u_\mu}{\partial z_k}\Big)\mathrm{d}t\mathrm{d}z = 0.$$

Par conséquent,

$$\int_0^L\int_0^\ell \left|Y_\mu^*\right|\left|u_\mu'\right|^2\Big|_0^T\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3 + \int_0^L\int_0^\ell\left(q_\mu^{k\ell}\frac{\partial u_\mu}{\partial z_\ell}\frac{\partial u_\mu}{\partial z_k}\right)\Big|_0^T\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3 = 0. \tag{3.2}$$

Si l'on note

$$E_\mu(T) = \int_0^L\int_0^\ell\left|Y_\mu^*\right|\left|u_\mu'(t)\right|^2\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3 + \int_0^L\int_0^\ell\left(q_\mu^{k\ell}\frac{\partial u_\mu(t)}{\partial z_\ell}\frac{\partial u_\mu(t)}{\partial z_k}\right)\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3,$$

l'identité (3.2) dit qu'on a conservation de l'énergie, i.e. (3.1). $\square$

Le comportement asymptotique de u_μ, solution de (1.10) lorsque μ tend vers zéro, est donné par le résultat suivant.

Théorème 3.2. *Il existe une sous-suite extraite de* $\{\mu\}$, *notée encore* $\{\mu\}$, *telle que*

$$\begin{cases} u_\mu^0 \rightharpoonup u^0 & \textit{faiblement dans } H_0^1(]0,\ell[\times]0,L[), \\ u_\mu^{1,*} \rightharpoonup u^1 & \textit{faiblement dans } L^2(]0,\ell[\times]0,L[), \end{cases} \tag{3.3}$$

et

$$\begin{cases} u_\mu \to u & \textit{faible} * \textit{dans } L^\infty(0,T,H_0^1(]0,\ell[\times]0,L[)), \\ u'_\mu \to u' & \textit{faible} * \textit{dans } L^\infty(0,T,L^2(]0,\ell[\times]0,L[)), \end{cases} \tag{3.4}$$

où u *est la solution du système*

$$\begin{cases} 6u'' - q_\mu^{kl}\dfrac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial z_l} = 0 & \textit{dans }]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[, \\ u = 0 \quad \textit{sur } \partial(]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[), \\ u_\mu(0) = \dfrac{u^0}{6} & \textit{dans }]0,\ell[\times]0,L[, \\ u'(0) = \dfrac{u'}{6} & \textit{dans }]0,\ell[\times]0,L[. \end{cases} \tag{3.5}$$

Les coefficients q_μ^{kl} *sont donnés par*

$$\begin{aligned} & q_{23}^* = q_{32}^* = 0, \\ & q_{22}^* = \frac{4\mathcal{A}}{a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}}, \quad q_{33}^* = \frac{2\mathcal{A}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

où $\mathcal{A}$ *est le déterminant de la matrice* (a_{ij}).

Preuve. On remarque tout d'abord que

$$E_\mu(0) \leq \frac{1}{2}\frac{1}{|Y_\mu^*|}\left\|u_\mu^{1,*}\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + \frac{q_\mu^{k\ell}}{|Y_\mu^*|^2}\left\|\frac{\partial u_\mu^0}{\partial z_\ell}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}\left\|\frac{\partial u_\mu^0}{\partial z_k}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}.$$

Par ailleurs, les estimations

$$\left\|u_\mu^{1,*}\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \leq \int_\Omega \left|u_\mu^1\right|^2 \mathrm{d}z \leq c\mu^2, \quad \left\|\frac{\partial u_\mu^0}{\partial z_l}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \leq c\mu \tag{3.7}$$

impliquent alors que l'on a

$$E_\mu(0) \leq c\mu. \tag{3.8}$$

Par la conservation de l'énergie (Proposition 3.1), il vient alors

$$E_\mu(T) \leq c\mu. \tag{3.9}$$

On pose $\mu^{-1}q_\mu^{kl} = q_\mu^{kl} + \theta_\mu^{kl}$ avec $\theta_\mu^{kl} \to 0$ dans $\mathbb{R}$, ainsi $\mu^{-1}q_\mu^{kl} \to q_{kl}^*$, où q_{kl}^* sont donnés par (3.6). On peut alors écrire

$$\begin{aligned}\mu^{-1}q_\mu^{kl}\mu\left\|\frac{\partial u_\mu}{\partial z_k}\right\|_{L^2(]0,l[\times]0,L[)}\left\|\frac{\partial u_\mu}{\partial z_l}\right\|_{L^2(]0,l[\times]0,L[)} &= \\ =\left(q_{kl}^*+\theta_\mu^{kl}\right)\mu\left\|\frac{\partial u_\mu}{\partial z_k}\right\|_{L^2(]0,l[\times]0,L[)}\left\|\frac{\partial u_\mu}{\partial z_l}\right\|_{L^2(]0,l[\times]0,L[)} &= \\ =\left(q_{ll}^*+\theta_\mu^{ll}\right)\mu\left\|\frac{\partial u_\mu}{\partial z_l}\right\|^2_{L^2(]0,l[\times]0,L[)}&.\end{aligned}$$

On choisit maintenant μ tel que $\theta_\mu^{ll} > -\frac{q_{ll}^*}{2}$. Il vient alors $q_{ll}^* + \theta_\mu^{ll} > \frac{q_{ll}^*}{2}$. Par conséquent,

$$\mu\left\|u'_\mu\right\|^2_{L^2(]0,l[\times]0,L[)} \leq c\mu, \quad \mu\left\|\frac{\partial u_\mu}{\partial z_l}\right\|^2_{L^2(]0,l[\times]0,L[)} \leq c\mu.$$

Alors de la coercivité évidente des cofficients q_{kl}^*, et de (3.7), (3.8) et (3.9), on a

$$\|u_\mu\|_{L^\infty\left(0,T,H_0^1(]0,\ell[\times]0,L[)\right)} \leq c, \quad \left\|u'_\mu\right\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(]0,\ell[\times]0,L[))} \leq c,$$

ce qui implique les convergences

$$\left\{\begin{array}{ll} u_\mu \rightharpoonup u & \text{faible} * \text{dans } L^\infty\left(0,T,H_0^1\left(]0,\ell[\times]0,L[\right)\right), \\ u'_\mu \rightharpoonup u' & \text{faible} * \text{dans } L^\infty\left(0,T,L^2\left(]0,\ell[\times]0,L[\right)\right). \end{array}\right. \tag{3.10}$$

D'autre part, les estimations (3.7) nous donnent

$$\left\{\begin{array}{ll} \mu^{-1}u_\mu^0 \rightharpoonup u^0 & \text{faiblement dans } H_0^1(]0,\ell[\times]0,L[), \\ \mu^{-1}u_\mu^{1,*} \rightharpoonup u^1 & \text{faiblement dans } L^2(]0,\ell[\times]0,L[), \end{array}\right.$$

d'où les convergences (3.3) et (3.4).

Il reste à montrer que (3.5) a lieu. Soient $\varphi \in \mathcal{D}(]0,\ell[\times]0,L[)$, $v \in \mathcal{D}(]0,T[)$. Multiplions la première équation de (1.10) par φv et intégrons par parties sur $(]0,\ell[\times]0,L[)\times]0,T[$, on obtient alors

$$(6-2\mu)\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell u_\mu\varphi v''\mathrm{d}z_2\,\mathrm{d}z_3\,\mathrm{d}t + \int_0^T\int_0^L\int_0^\ell \mu^{-1}q_\mu^{k\ell}\frac{\partial u_\mu}{\partial z_\ell}\frac{\partial\varphi}{\partial z_k}v\,\mathrm{d}z\mathrm{d}t = 0, \tag{3.11}$$

où l'on passe à limite pour trouver

$$6\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell \mu\varphi v''\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3\mathrm{d}t + \int_0^T\int_0^L\int_0^\ell q_{k\ell}^*\frac{\partial u}{\partial z_\ell}\frac{\partial\varphi}{\partial z_k}v\,\mathrm{d}z\mathrm{d}t = 0.$$

En intégrant une deuxième fois par parties, on déduit la première équation de (3.5). Grâce à la deuxième équation de (1.10) et à la première convergence de (3.4), la deuxième équation de (3.5) est aussi satisfaite.

Montrons maintenant que les deux dernières équations de (3.5) sont aussi satisfaites. Pour ce faire, multiplions la première équation de (1.10) par $\varphi\, v$ avec

$$\varphi \in \mathcal{D}\left(]0,\ell[\times]0,L[\right)\times]0,T[) \text{ et } v \in \mathcal{D}(]0,T[),\ v\,(T)=0,\ v'\,(T)=0,$$

et intégrons par parties deux fois par rapport à t. Il vient alors

$$\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell (6-2\mu)u_\mu\varphi\, v''\,\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3\mathrm{d}t + \int_0^L\int_0^\ell (6-2\mu)u_\mu(0)\,v'(0)\,\varphi\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3 -$$
$$-\int_0^L\int_0^\ell (6-2\mu)\,u'_\mu(0)v(0)\varphi\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3 + \int_0^T\int_0^L\int_0^\ell \mu^{-1}q_\mu^{k\ell}\frac{\partial u_\mu}{\partial z_\ell}\frac{\partial\varphi}{\partial z_k}v\,\mathrm{d}z\mathrm{d}t = 0.$$

Le passage à la limite donne

$$\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell 6uv''\varphi\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3\mathrm{d}t + \int_0^L\int_0^\ell u^0\,\varphi v'(0)\,\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3 -$$
$$-\int_0^L\int_0^\ell u^1\varphi v(0)\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3 + \int_0^T\int_0^L\int_0^\ell q^*_{kl}\frac{\partial u}{\partial z_\ell}\frac{\partial\varphi}{\partial z_k}v\,\mathrm{d}z\mathrm{d}t = 0.$$

En intégrant par parties et en utilisant $(3.5)_1$, (3.10) et (3.11), on trouve

$$\int_0^T\int_0^L\int_0^\ell 6u''\,v\,\varphi\,\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3\mathrm{d}t + 6\int_0^L\int_0^\ell (uv')\Big|_0^T\varphi\,\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3 -$$
$$-6\int_0^L\int_0^\ell (u'v)\Big|_0^T\varphi\,\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3 + \int_0^L\int_0^\ell u^0\ v'(0)\ \varphi\,\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3 -$$
$$-\int_0^L\int_0^\ell u^1\ v(0)\,\varphi\,\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3 - \int_0^T\int_0^L\int_0^\ell q^*_{kl}\frac{\partial^2 u}{\partial z_\ell\partial z_k}\varphi v\,\mathrm{d}z\mathrm{d}t = 0.$$

Grâce à $(3.5)_1$, il vient

$$v'(0)\int_0^L\Big(\int_0^\ell u^0\varphi\mathrm{d}z_2\Big)\mathrm{d}z_3 - v(0)\int_0^L\Big(\int_0^\ell u^1\varphi\mathrm{d}z_2\Big)\mathrm{d}z_3 +$$
$$+6v(0)\int_0^L\Big(\int_0^\ell u'(0)\varphi\mathrm{d}z_2\Big)\mathrm{d}z_3 - 6v'\,(0)\int_0^L\Big(\int_0^\ell u(0)\varphi\mathrm{d}z_2\Big)\mathrm{d}z_3 = 0.$$

En choisissant v tel que $v(0)\neq 0$ et $v'(0)=0$, on a $u'(0)=u^1/6$. Ensuite avec v tel que $v(0)=0$ et $v'(0)\neq 0$, on obtient $u(0)=u^0/6$. □

3.2. **Convergence des contrôles**

Maintenant, nous allons étudier la convergence du contrôle $v_\mu = -\varphi_\mu$ du système (2.7) avec φ_μ donné par (2.20). Pour ce faire, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.3. *On suppose que les données initiales* $\varphi_\mu^0, \varphi_\mu^{1,*}$ *du système* (3.28) *vérifient*

$$\varphi_\mu^0 \in L^2\left(]0,\ell[\times]0,L[\right), \quad \varphi_\mu^{1,*} \in H^{-1}\left(]0,\ell[\times]0,L[\right).$$

Alors il existe deux constantes c_1 *et* c_2*, positives et indépendantes de* μ*, telles que*

$$c_1\left\{\left\|\varphi_\mu^0\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + \mu^{-2}\left\|\varphi_\mu^{1,*}\right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)}\right\} \leq \left\|\varphi_\mu\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(]0,\ell[\times]0,L[))} \leq$$

$$\leq c_2\left\{\left\|\varphi_\mu^0\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + \mu^{-2}\left\|\varphi_\mu^{1,*}\right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)}\right\}.$$

Preuve. On commence par régulariser le système (2.20). Introduisons τ_μ, solution du système

$$\text{(3.12)} \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{kl}\dfrac{\partial \tau_\mu}{\partial z_l}\right) = -\varphi_\mu^{1,*} & \text{dans } \left(]0,\ell[\times]0,L[\right), \\ \tau_\mu = 0 \quad \text{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\right), \end{cases}$$

et soit γ_μ la fonction définie par

$$\gamma_\mu(z,t) = \int_0^t \varphi_\mu(z,s)\,\mathrm{d}s + \tau_\mu.$$

On vérifie comme dans le paragraphe précédent que γ_μ est solution de

$$\text{(3.13)} \qquad \begin{cases} \left|Y_\mu^*\right|\gamma_\mu'' \dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q_\mu^{k\ell}\dfrac{\partial \gamma_\mu}{\partial z_\ell}\right) = 0 & \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[, \\ \gamma_\mu = 0 \quad \text{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\right), \\ \gamma_\mu(0) = \tau_\mu \quad \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[, \\ \gamma_\mu'(0) = \varphi_\mu^0 \quad \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[. \end{cases}$$

Par (3.5), pour tout $t \in [0,T]$ on a

$$\text{(3.14)} \qquad \left|Y_\mu^*\right|\left\|\gamma_\mu'\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + q_\mu^{kl}\left\|\frac{\partial \gamma_\mu}{\partial z_l}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}\left\|\frac{\partial \gamma_\mu}{\partial z_k}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} =$$

$$= \left|Y_\mu^*\right|\left\|\varphi_\mu^0\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + q_\mu^{kl}\left\|\frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_l}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}\left\|\frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_k}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} = \mathcal{C},$$

où $\mathcal{C}$ est une constante positive. Grâce à (3.12), il vient

$$\int_0^L \int_0^\ell \mu^{-1} q_\mu^{kl} \mu \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_l} \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_k} \, \mathrm{d}z_2 \mathrm{d}z_3 = -\left\langle \varphi_\mu^{1,*}, \tau_\mu \right\rangle .$$

En appliquant les inégalités de Young et Poincaré, on obtient

(3.15)
$$\mu \int_0^L \int_0^\ell \frac{1}{\mu} q_\mu^{kl} \Big(\frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_l} \Big)^2 \mathrm{d}z_2 \mathrm{d}z_3 \le c' \Big\| \frac{\varphi_\mu^{1,*}}{2c} \Big\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)} + \frac{c}{2} \Big\| \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_l} \Big\|^2_{H_0^1(]0,\ell[\times]0,L[)} .$$

D'autre part, en utilisant (3.8) et (3.9), on obtient

$$\int_0^L \int_0^\ell \mu^{-1} q_\mu^{k\ell} \left(\frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell} \right)^2 \mathrm{d}z_2 \mathrm{d}z_3 \ge c \left\| \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell} \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} .$$

Si on choisit μ tel que $c = \frac{c_2 \mu}{2c'}$, l'inégalité (3.15) devient

$$\frac{c_2 \mu}{4} \Big\| \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell} \Big\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \le \frac{c'^2 \mu}{c_2 \mu} \left\| \varphi_\mu^{1,*} \right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)} . \tag{3.16}$$

Combinant (3.14) et (3.16), il vient

$$\left| Y_\mu^* \right| \left\| \gamma_\mu' \right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \le c \Big(\left| Y_\mu^* \right| \left\| \varphi_\mu^0 \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + \frac{1}{\mu} \left\| \varphi_\mu^{1,*} \right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)} \Big),$$

car $\gamma_\mu' = \varphi_\mu$. Alors,

$$\left\| \varphi_\mu \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \le c \left(\left\| \varphi_\mu^0 \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + \mu^{-2} \left\| \varphi_\mu^{1,*} \right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)} \right) .$$

Montrons maintenant l'inégalité inverse

$$c_1 \left(\left\| \varphi_\mu^0 \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + \mu^{-2} \left\| \varphi_\mu^{1,*} \right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)} \right) \le \left\| \varphi_\mu \right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} .$$

Pour cela, soit $\rho(t) = t^2 (T-t)^2$. En multipliant la première équation de (3.13) par $\rho\, \gamma_\mu$ et en intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^T \int_0^L \int_0^\ell q_{k\ell}^* \frac{\partial \gamma_\mu}{\partial z_k} \frac{\partial \gamma_\mu}{\partial z_\ell} \, \mathrm{d}z_2 \mathrm{d}z_3 \mathrm{d}t =$$
$$= \left| Y_\mu^* \right| \Big[\int_0^T \int_0^L \int_0^\ell \rho(t) \left(\gamma_\mu' \right)^2 \mathrm{d}z_2 \mathrm{d}z_3 \mathrm{d}t + \int_0^T \int_0^L \int_0^\ell \rho'(t) \gamma_\mu \gamma_\mu' \, \mathrm{d}z_2 \mathrm{d}z_3 \mathrm{d}t \Big].$$

Compte tenu de (3.14) et (3.15) on a

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \int_0^T \rho(t) \mathrm{d}t = 2 \left| Y_\mu^* \right| \int_0^T \int_0^L \int_0^\ell \rho(t) \left(\gamma_\mu' \right)^2 \mathrm{d}z_2 \mathrm{d}z_3 \mathrm{d}t + \\ + \left| Y_\mu^* \right| \int_0^T \int_0^L \int_0^\ell \rho'(t)\, \gamma_\mu \gamma_\mu' \, \mathrm{d}z_2 \mathrm{d}z_3 \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Appliquant l'inégalité de Young au second terme du membre de droite de (3.17), on obtient

$$\int_0^T \int_0^L \int_0^\ell \rho'(t)\gamma_\mu \gamma'_\mu \,\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3\mathrm{d}t \leq \alpha \int_0^T \int_0^L \int_0^\ell \rho(t)\gamma_\mu^2 \,\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3\mathrm{d}t + \tag{3.18}$$
$$+ c(\alpha) \int_0^T \int_0^L \int_0^\ell \left(\gamma'_\mu\right)^2 \,\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3\mathrm{d}t,$$

où

$$c(\alpha) = \frac{1}{4\alpha}\left\| \frac{\rho'^2}{\rho} \right\|_{L^\infty(]0,T[)}.$$

D'autre part, si c_p désigne la constante de Poincaré, alors on a

$$\int_0^T \int_0^L \int_0^\ell \rho(t)\gamma_\mu^2 \,\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3\mathrm{d}t \leq c_p^2 \int_0^T \int_0^L \int_0^\ell \rho(t)\frac{\partial \gamma_\mu}{\partial z_k}\frac{\partial \gamma_\mu}{\partial z_\ell} \,\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3\mathrm{d}t. \tag{3.19}$$

Compte tenu de (3.14) et (3.15), de (3.19) on déduit

$$\int_0^T \int_0^L \int_0^\ell \rho(t)\gamma_\mu^2 \,\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3\mathrm{d}t \leq \tag{3.20}$$
$$\leq c_p^2 \frac{2}{c}\Big\{ \left\|\varphi_\mu^0\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + \frac{q^*_{kl}}{\mu}\left\| \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_l}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}\left\| \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_k}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}\Big\}.$$

Ensuite, en reportant (3.18) et (3.20) dans (3.17), on obtient

$$\Big\{ \int_0^T \rho(t)\mathrm{d}t \Big\}\Big\{ \left|Y^*_\mu\right| \left\|\varphi_\mu^0\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} - c_p^2 \frac{2}{c} 6\alpha \left|Y^*_\mu\right| \left\|\varphi_\mu^0\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} +$$
$$+ q_\mu^{kl}\left\| \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_l}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}\left\| \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_k}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} -$$
$$- 6\alpha \frac{q_\mu^{kl}}{\mu}\left\| \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_l}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}\left\| \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_k}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}\Big\} \leq$$
$$\leq \Big\{ \left|Y^*_\mu\right| \|\rho\|_{L^\infty(]0,T[)} + c(\alpha)\left|Y^*_\mu\right| \Big\} \left\|\gamma'_\mu\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(]0,\ell[\times]0,L[))}.$$

Grâce à la convergence de $\mu^{-1}q_\mu^{kl}$ vers q^*_{kl}, on en déduit

$$\left\|\varphi_\mu^0\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + q^*_{kl}\left\| \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_l}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}\left\| \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_k}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \leq \tag{3.21}$$
$$\leq c' \left\|\varphi_\mu\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}.$$

D'autre part, la formulation (3.12) donne l'estimation

$$\left|\langle \varphi_\mu^{1,*}, u\rangle\right| \leq c\mu \left\| \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_l}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}\left\| \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_k}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \leq$$
$$\leq c_2\mu \|u\|_{H_0^1(]0,\ell[\times]0,L[)} \left\| \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_l}\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}.$$

Par conséquent,

$$\left\|\varphi_\mu^{1,*}\right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)} \leq c\mu\left\|\nabla\tau_\mu\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)},$$

ce qui reporté dans (3.21) donne

$$c_2\left\{\left\|\varphi_\mu^0\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + \mu^{-2}\left\|\varphi_\mu^{1,*}\right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)}\right\} \leq \left\|\varphi_\mu\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)},$$

qui achève la preuve. □

THÉORÈME 3.4. *Soit φ_μ solution du problème (4.3). On a alors les convergences*

$$\begin{cases} \mu^{-1}\varphi_\mu^0 \rightharpoonup \varphi^0 & \textit{faiblement dans } L^2(]0,\ell[\times]0,L[), \\ \mu^{-1}\varphi_\mu^{1,*} \rightharpoonup \varphi^{1,*} & \textit{faiblement dans } H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[), \end{cases} \tag{3.22}$$

et

$$\mu^{-1}\varphi_\mu \rightharpoonup \varphi \quad \textit{faiblement dans } L^2(]0,\ell[\times]0,L[), \tag{3.23}$$

où φ est la solution du système

$$\begin{cases} 6\varphi'' - q^*_{k\ell}\dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z_\ell}\right) = 0 & \textit{dans }]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[\,, \\ \varphi = 0 \quad \textit{sur } \partial\,(]0,\ell[\times]0,L[)\,, \\ \varphi(0) = \varphi^0 \quad \textit{dans }]0,\ell[\times]0,L[\,, \\ \varphi'(0) = \dfrac{\varphi_\mu^{1,*}}{6} \quad \textit{dans }]0,\ell[\times]0,L[\,. \end{cases}$$

Preuve. Tout d'abord, on a les estimations

$$\left\|(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^{1,*})\right\|_F \leq c\left|Y_\mu^*\right|\left\|\Lambda_{\varepsilon\mu}\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^{1,*}\right)\right\|_{F'},$$
$$\left\|(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^{1,*})\right\|_F \leq c\mu\left(\frac{\left\|u_\mu^1\right\|}{\left|Y_\mu^*\right|} + \frac{\left\|u_\mu^0\right\|}{\left|Y_\mu^*\right|}\right) \leq c\mu.$$

ce qui, par le Lemme 3.1, donne

$$\begin{aligned}\left\|\varphi_\mu^0\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + \mu^{-2}\left\|\varphi_\mu^{1,*}\right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)} &\leq \left|Y_\mu^*\right|\left\langle\Lambda_{\varepsilon\mu}\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^{1,*}\right),\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^{1,*}\right)\right\rangle \\ &\leq \left|Y_\mu^*\right|\left\|\Lambda_{\varepsilon\mu}\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^{1,*}\right)\right\|_{F'}\left\|\left(\varphi_\mu^0,\varphi_\mu^{1,*}\right)\right\|_F \leq c\mu^2,\end{aligned}$$

et alors on a

$$\left\|\varphi_\mu^0\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \leq c\left\{\left\|\varphi_\mu^0\right\|^2_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} + \mu^{-2}\left\|\varphi_\mu^{1,*}\right\|^2_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)}\right\} \leq c\mu^2$$

et aussi

$$\left\|\varphi_\mu\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)} \leq c\mu.$$

Par conséquent,

$$\left\|\mu^{-1}\varphi_\mu^0\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}+\left\|\mu^{-2}\varphi_\mu^{1,*}\right\|_{H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)}+\left\|\mu^{-1}\varphi_\mu\right\|_{L^2(]0,\ell[\times]0,L[)}\leq c.$$

On en déduit les convergences (3.22) et (3.23).

Comme les données initiales sont peu régulières, avant de passer à la limite dans le système (2.20), on régularise le problème en posant

$$\gamma_\mu(z,t)=\int_0^t\varphi_\mu(z,s)\,\mathrm{d}s+\tau_\mu(z_2,z_3)\,, \tag{3.24}$$

où τ_μ est solution de

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial z_k}\Big(q_\mu^{k\ell}\dfrac{\partial\tau_\mu}{\partial z_\ell}\Big)=-\varphi_\mu^{1,*} \quad \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\,,\\ \tau_\mu=0 \quad \text{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\right). \end{cases}$$

En procédant comme dans la preuve du Théorème 3.1, on vérifie sans peine que γ_μ est solution du système

$$\begin{cases} \left|Y_\mu^*\right|\gamma_\mu''-\dfrac{\partial}{\partial z_k}\Big(q_\mu^{k\ell}\dfrac{\partial\gamma_\mu}{\partial z_\ell}\Big)=0 \quad \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[\,,\\ \gamma_\mu=0 \quad \text{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\right),\\ \gamma_\mu(0)=\tau_\mu \quad \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\,,\\ \gamma_\mu'(0)=\varphi_\mu^0 \quad \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\,. \end{cases} \tag{3.25}$$

On a facilement l'estimation

$$\|\tau_\mu\|_{H^1(]0,\ell[\times]0,L[)}\leq c\mu,$$

de sorte que

$$\mu^{-1}\tau_\mu\rightharpoonup\tau \quad \text{faiblement dans } H^1(]0,\ell[\times]0,L[).$$

On en déduit l'estimation

$$\|\gamma_\mu\|^2_{H^1(]0,\ell[\times]0,L[)}\leq c\mu^2$$

et les convergences

$$\begin{aligned} &\mu^{-1}\gamma_\mu\rightharpoonup\gamma \quad \text{faible} * \text{dans } L^\infty\left(0,T,H^1(]0,\ell[\times]0,L[)\right),\\ &\mu^{-1}\gamma_\mu'\rightharpoonup\gamma' \quad \text{faible} * \text{dans } L^\infty\left(0,T,L^2(]0,\ell[\times]0,L[)\right). \end{aligned}$$

En passant ensuite à la limite dans (3.25), on obtient

$$\begin{cases} 6\gamma''-q_{k\ell}^*\dfrac{\partial}{\partial z_k}\Big(\dfrac{\partial\gamma}{\partial z_\ell}\Big)=0 \quad \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\times]0,T[\,,\\ \gamma=0 \quad \text{sur } \partial\left(]0,\ell[\times]0,L[\right),\\ \gamma(0)=\tau \quad \text{dans}\,]0,\ell[\times]0,L[\,,\\ \gamma'(0)=\varphi^0 \quad \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\,, \end{cases} \tag{3.26}$$

où τ est solution du système

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial z_k}\left(q^*_{k\ell}\dfrac{\partial \tau}{\partial z_\ell}\right) = -\varphi^{1,*} \quad \text{dans }]0,\ell[\times]0,L[\,, \\ \tau_\mu = 0 \quad \text{sur } \partial\big(]0,\ell[\times]0,L[\big). \end{cases}$$

Comme

$$\gamma \in C\left([0,T]\,; H^1_0(]0,\ell[\times]0,L[)\right)\cap C^1\left([0,T]\,, L^2(]0,\ell[\times]0,L[)\right)\cap \\ \cap\, C^2\left([0,T]\,, H^{-1}(]0,\ell[\times]0,L[)\right),$$

on vérifie sans peine que $\gamma'_\mu = \varphi_\mu$, $\gamma' = \varphi$ et (3.26) n'est autre que le système de l'ennoncé du théorème. Ceci achève la démonstration. □

Appendice. Preuve du Lemme 2.5

Notre preuve, basée sur le théorème de compacité par compensation de Murat [13], utilise essentiellement des idées de l'appendice de J. Saint Jean Paulin et L.R. Tcheugoué Tébou [14]. Dans tout ce qui suit, c désigne différentes constantes positives indépendantes de ε.

Introduisant ρ_ε, solution de

$$\text{(A.1)} \qquad \begin{cases} -\varepsilon^{-1}\dfrac{\partial^2\rho_\varepsilon}{\partial z_1^2} - \dfrac{\partial^2\rho_\varepsilon}{\partial z_2^2} - \dfrac{\partial^2\rho_\varepsilon}{\partial z_3^2} = f_{\varepsilon\mu} \quad \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}, \\ \rho_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Omega^{*,0}_{\varepsilon\mu}, \\ \dfrac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\mu}, \end{cases}$$

l'équation $A_{\varepsilon\mu}\tau_{\varepsilon\mu} = f_{\varepsilon\mu}$ s'écrit

$$\text{(A.2)} \qquad -\left[\varepsilon^{-1}\frac{\partial A_1}{\partial z_1} + \frac{\partial A_\ell}{\partial z_\ell}\right] = f_{\varepsilon\mu} \quad \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}.$$

En soustrayant (A.2) de (A.1), on obtient

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(A_1 - \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial z_1}\right) + \frac{\partial}{\partial z_\ell}\left(A_\ell - \frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial z_\ell}\right) = 0.$$

Posons

$$\sigma^i_{\varepsilon\mu} = A_i - \frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial z_i} = \varepsilon^{-1}a_{i1}\frac{\partial\tau_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} + a_{i\ell}\frac{\partial \tau_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell} - \frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial z_i}.$$

On vérifie facilement que

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma^1_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} + \frac{\partial\sigma^\ell_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell} = 0.$$

Comme on a $\|f_{\varepsilon\mu}\|_{V'_{\varepsilon\mu}} \leq c$, on en déduit

$$\|\tau_{\varepsilon\mu}\| \leq c, \quad \|\nabla\rho_\varepsilon\|_{[L^2(\Omega^*_{\varepsilon\mu})]^3} \leq c, \quad \|\widetilde{\sigma}_{\varepsilon\mu}\|_{[L^2(\Omega)]^3} \leq c.$$

Alors, après extraction éventuelle d'une sous-suite on a

$$\begin{cases} \varphi_\varepsilon\tau_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup \ \tau_\mu \quad \text{faiblement dans } \ H^1_0(\Omega)\,, \\ \widetilde{\sigma}_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup \sigma_\mu \quad \text{faiblement dans } [L^2(\Omega)]^3, \end{cases}$$

où σ_μ vérifie

$$\frac{\partial}{\partial z_\ell}\Big(\int_0^1 \sigma^\ell_\mu \mathrm{d}z_1\Big) = 0. \tag{A.3}$$

Soit $h \in \mathcal{D}(\Omega)$, on introduit $n_{\varepsilon\mu}$ définie par

$$n_{\varepsilon\mu} = \widetilde{\sigma}^1_{\varepsilon\mu}\Big(\varepsilon^{-1}\frac{\partial\,(Q_{\varepsilon\mu}W_{\varepsilon\mu})}{\partial z_1}\Big) + \widetilde{\sigma}^\ell_{\varepsilon\mu}\Big(\frac{\partial\,(Q_{\varepsilon\mu}W_{\varepsilon\mu})}{\partial z_\ell}\Big),$$

avec

$$\begin{cases} A_{\varepsilon\mu}W_{\varepsilon\mu} = h \quad \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\mu}, \\ W_{\varepsilon\mu} = 0 \quad \text{sur } \Omega^{*,0}_{\varepsilon\mu}, \\ \dfrac{\partial W_{\varepsilon\mu}}{\partial \nu_{A_{\varepsilon\mu}}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\mu}. \end{cases}$$

En remarquant que

$$\frac{\partial\widetilde{\tau}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_i}\,\frac{\partial\,(Q_{\varepsilon\mu}W_{\varepsilon\mu})}{\partial z_j} = \frac{\partial\,(Q_\varepsilon\tau_{\varepsilon\mu})}{\partial z_i}\,\frac{\partial\widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_j}, \quad \forall i,j = 1,2,3,$$

et aussi que

$$\begin{aligned} n_{\varepsilon\mu} =& A_1\Big(\varepsilon^{-1}\frac{\partial\,(Q_\varepsilon W_{\varepsilon\mu})}{\partial z_1}\Big) + A_\ell\frac{\partial\,(Q_\varepsilon W_{\varepsilon\mu})}{\partial z_\ell} \\ &- \frac{\partial\widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_1}\Big(\varepsilon^{-1}\frac{\partial(Q_{\varepsilon\mu}W_{\varepsilon\mu})}{\partial z_1}\Big) - \frac{\partial\widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_\ell}\,\frac{\partial\,(Q_{\varepsilon\mu}W_{\varepsilon\mu})}{\partial z_1}, \end{aligned} \tag{A.4}$$

il vient

$$A_1\Big(\varepsilon^{-1}\frac{\partial\,(Q_\varepsilon W_{\varepsilon\mu})}{\partial z_1}\Big) + A_\ell\frac{\partial\,(Q_\varepsilon W_{\varepsilon\mu})}{\partial z_\ell} = \varepsilon^{-1}\widetilde{\xi}^1_{\varepsilon\mu}\frac{\partial\,(Q_{\varepsilon\mu}\tau_{\varepsilon\mu})}{\partial z_1} + \widetilde{\xi}^\ell_{\varepsilon\mu}\frac{\partial\,(Q_{\varepsilon\mu}\tau_{\varepsilon\mu})}{\partial z_\ell},$$

où

$$\widetilde{\xi}^1_{\varepsilon\mu} = \varepsilon^{-1}a_{11}\frac{\partial\widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} + a_{1\ell}\frac{\partial\widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell}, \quad \widetilde{\xi}^\ell_{\varepsilon\mu} = \varepsilon^{-1}a_{\ell 1}\frac{\partial\widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} + a_{\ell k}\frac{\partial\widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_k}.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, φ indépendante de z_1, on a alors

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Big(\varepsilon^{-1} \widetilde{\xi}^1_{\varepsilon\mu} \frac{\partial\left(Q_{\varepsilon\mu}\tau_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_1} + \widetilde{\xi}^\ell_{\varepsilon\mu} \frac{\partial\left(Q_{\varepsilon\mu}\tau_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_\ell} \Big) \varphi \, \mathrm{d}z \\
&\quad = - \int_\Omega \Big(\varepsilon^{-1} \frac{\partial \widetilde{\xi}^1_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} + \frac{\partial \widetilde{\xi}^\ell_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell} \Big) Q_{\varepsilon\mu}\tau_{\varepsilon\mu} \, \varphi \, \mathrm{d}z - \int_\Omega \widetilde{\xi}^\ell_{\varepsilon\mu} \left(Q_{\varepsilon\mu}\tau_{\varepsilon\mu}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial z_\ell} \, \mathrm{d}z.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Le terme de droite converge vers

$$I = \int_\Omega \left(\left| Y^*_\mu \right| \; h \; \tau_\mu \; \varphi \right) \, \mathrm{d}z - \int_\Omega \Big(\xi^\ell_\mu \; \tau_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z_\ell} \Big) \, \mathrm{d}z.$$

Par ailleurs, on a successivement

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \xi^\ell_\mu \; \tau_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z_\ell} \, \mathrm{d}z = \int_0^\ell \int_0^\ell \Big(\tau_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z_\ell} \Big) \Big(\int_0^1 \xi^\ell_\mu \mathrm{d}z_1 \Big) \mathrm{d}z_2 \mathrm{d}z_3 \\
&= - \int_0^\ell \int_0^\ell \tau_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z_\ell} \Big(q^{k\ell}_\mu \frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell} \Big) \mathrm{d}z_2 \mathrm{d}z_3 \\
&= \int_0^\ell \int_0^\ell \varphi \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell} \Big(q^{k\ell}_\mu \frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell} \Big) \mathrm{d}z_2 \mathrm{d}z_3 + \int_0^\ell \int_0^\ell \varphi \; \tau_\mu \Big(q^{k\ell}_\mu \frac{\partial^2 W_\mu}{\partial z_\ell^2} \Big) \mathrm{d}z_2 \mathrm{d}z_3 \\
&= \int_0^\ell \int_0^\ell \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell} \Big(q^{k\ell}_\mu \frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell} \Big) \varphi \; \mathrm{d}z_2 \mathrm{d}z_3 - \int_0^\ell \int_0^\ell \left| Y^*_\mu \right| \varphi \; \tau_\mu \; h \, \mathrm{d}z_2 \mathrm{d}z_3.
\end{aligned}$$

Alors

$$I = \int_0^\ell \int_0^\ell \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell} \Big(q^{k\ell}_\mu \frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell} \Big) \varphi \, \mathrm{d}z_2 \mathrm{d}z_3.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&A_1 \Big(\varepsilon^{-1} \frac{\partial\left(Q_{\varepsilon\mu}\tau_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_1} \Big) + A_\ell \Big(\frac{\partial\left(Q_{\varepsilon\mu}\tau_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_\ell} \Big) \rightharpoonup \\
&\rightharpoonup q^{k\ell}_\mu \frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell} \frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell} \text{ faiblement dans } \mathcal{D}'(\Omega).
\end{aligned} \tag{A.6}$$

On s'intéresse maintenant au deuxième terme de (A.5). La méthode des échelles multiples utilisées dans [2] donne

$$W_{\varepsilon\mu} = W_\mu + \varepsilon \Big(- \chi^\ell_\mu(y) \frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell} \Big) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 W_\mu}{\partial z_\ell^2} \; \theta^\ell_\mu(y) + \cdots,$$

où $W_\mu = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} W_{\varepsilon\mu}$, χ_μ est la fonction correcteur donnée par le système (1.12), tandis que θ_μ (le correcteur du deuxième ordre) est solution du système

$$\begin{cases} -a_{ij}\dfrac{\partial}{\partial y_i}\Big(\dfrac{\partial \theta_\mu^\ell}{\partial y_j} - \chi_\mu^\ell \mu_j^\ell\Big) = -q_\mu^{k\ell}\left|Y_\mu^*\right| - a_{ki}\dfrac{\partial\left(\chi_\mu^* - y_k\right)}{\partial y_i} \quad \text{dans } Y_\mu^*, \\ a_{ij}\Big(\dfrac{\partial \theta_\mu^\ell}{\partial y_j} - \chi_\mu^\ell \mu_j^\ell\Big)\nu_i = 0 \quad \text{sur } \partial_N Y_\mu^*, \\ \theta_\mu^\ell \quad \text{périodique en } y_\ell. \end{cases}$$

On vérifie aisement l'estimation

$$\left|\nabla \theta_\mu^\ell\right|_{[L^2(Y_\mu^*)]^3} \le c\,\mu \quad \text{(avec } c \text{ une constante indépendante de } \varepsilon\text{)}.$$

On a aussi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_1} = -\varepsilon \dfrac{\partial \widetilde{\chi}_\mu^\ell(y)}{\partial y_1}\dfrac{\partial \widetilde{W}_\mu}{\partial z_\ell} + \varepsilon^2 R_\varepsilon^1(z) \quad \text{avec } \left\|R_\varepsilon^1\right\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon\mu}^*)} \le c; \\ \dfrac{\partial \widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell} = \Big(1 - \dfrac{\partial \widetilde{\chi}_\mu^\ell(y)}{\partial y_\ell}\Big)\dfrac{\partial \widetilde{W}_\mu}{\partial z_\ell} + \varepsilon R_\varepsilon^\ell(z) \quad \text{avec } \left\|R_\varepsilon^\ell\right\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon\mu}^*)} \le c. \end{cases}$$

Ensuite, on a successivement

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_i}\frac{\partial\left(Q_\varepsilon W_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_i} &= \frac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_i}\frac{\partial \widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_i} = \frac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_1}\Big(\varepsilon^{-1}\frac{\partial\left(Q_\varepsilon W_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_1}\Big) + \frac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_\ell}\frac{\partial \widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell} \\ &= \frac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_1}\Big(-\frac{\partial \widetilde{\chi}_\mu^\ell}{\partial y_1}\Big)\frac{\partial \widetilde{W}_\mu}{\partial z_\ell} + \frac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_\ell}\Big(1 - \frac{\partial \widetilde{\chi}_\mu^\ell}{\partial y_\ell}\Big)\frac{\partial \widetilde{W}_{\varepsilon\mu}}{\partial z_\ell} + R_\varepsilon(z) \\ &= \frac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_1}\Big(\mu_{i\ell} - \frac{\partial \widetilde{\chi}_\mu^i}{\partial y_i}\Big)\frac{\partial \widetilde{W}_\mu}{\partial z_\ell} + R_\varepsilon(z). \end{aligned}$$

Posons

$$g_{\varepsilon\mu} = \Big(\mu_{i\ell} - \frac{\partial \chi_\mu^i}{\partial y_i}\Big)\frac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_1}.$$

Il est clair qu'on a la convergence

$$g_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup g_\mu^* \quad \text{faiblement dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, φ indépendante de z_1. Il vient

$$\begin{aligned} \int_\Omega n_{\varepsilon\mu}\,\varphi\,\mathrm{d}z &= \int_\Omega \sigma_{\varepsilon\mu}^1\Big(\varepsilon^{-1}\frac{\partial(Q_\varepsilon W_{\varepsilon\mu})}{\partial z_1}\Big)\varphi\,\mathrm{d}z + \int_\Omega \sigma_{\varepsilon\mu}^\ell \frac{\partial\left(Q_\varepsilon W_{\varepsilon\mu}\right)}{\partial z_\ell}\varphi\,\mathrm{d}z \\ &= -\int_\Omega \Big(\varepsilon^{-1}\frac{\partial \sigma_{\varepsilon\mu}^1}{\partial z_1} + \frac{\partial \sigma_{\varepsilon\mu}^\ell}{\partial z_\ell}\Big) W_{\varepsilon\mu}\,\varphi\,\mathrm{d}z - \int_\Omega \sigma_{\varepsilon\mu}^\ell\left(Q_\varepsilon W_{\varepsilon\mu}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial z_\ell}\,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

On a alors

$$\int_\Omega n_{\varepsilon\mu}\,\varphi\,\mathrm{d}z \rightharpoonup \int_\Omega \sigma_\mu^\ell\, W_\mu \frac{\partial\varphi}{\partial z_\ell}\,\mathrm{d}z = \int_0^\ell \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial z_\ell}\Big(\int_0^1 \sigma_\mu^\ell\,\mathrm{d}z_1\Big) W_\mu\,\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3 + \\ + \int_0^\ell \int_0^\ell \Big(\int_0^1 \sigma_\mu^\ell\,\mathrm{d}z_1\Big)\frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell}\,\varphi\,\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3$$

et, grâce à (A.3),

$$\int_\Omega n_{\varepsilon\mu}\,\varphi\mathrm{d}z \to \int_\Omega \Big(\int_0^1 \sigma_\mu^\ell\,\mathrm{d}z_1\Big)\frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell}\,\varphi\,\mathrm{d}z,$$

i.e.,

$$\text{(A.7)} \qquad n_{\varepsilon\mu} \rightharpoonup \Big(\int_0^1 \sigma_\mu^\ell\,\mathrm{d}z_1\Big)\,\frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell} \quad \text{faiblement dans } \mathcal{D}'(\Omega)\,.$$

Combinant alors (A.4), (A.6) et (A.7), on obtient

$$q_\mu^{k\ell}\,\frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell}\,\frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell} - g_\mu^*\frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell} = \Big(\int_0^1 \sigma_\mu^\ell\,\mathrm{d}z_1\Big)\frac{\partial W_\mu}{\partial z_\ell}.$$

Comme le choix de W_μ est arbitraire, on en déduit

$$q_\mu^{k\ell}\,\frac{\partial \tau_\mu}{\partial z_\ell} - g_\mu^* = \int_0^1 \sigma_\mu^\ell\,\mathrm{d}z_1$$

et, par (A.3),

$$q_\mu^{k\ell}\,\frac{\partial^2 \tau_\mu}{\partial z_\ell^2} = -\frac{\partial g_\mu^*}{\partial z_\ell},$$

avec

$$\frac{\partial g_\mu^*}{\partial z_\ell} \in H^{-1}\,(]0,\ell[\times]0,\ell[)$$

car $g_\mu^* \in Ł^2\,(]0,\ell[\times]0,\ell[)$. Il suffit maintenant de choisir

$$f_\mu^* = -\frac{\partial g_\mu^*}{\partial z_\ell}$$

pour que la preuve du Lemme 3.2 soit terminée. □

RÉFÉRENCES

[1] N. Aib, *Homogénéisation de structures réticulées.* Thèse de Magister, Université de Constantine. Constantine, 1990.

[2] A. Bensousssan, J.L. Lions and G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures.* North-Holland, Amsterdam, 1978.

[3] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Masson, Paris, 1983.

[4] P.G. Ciarlet, *A justification of the von Karman equations.* Arch. Rational Mech. Anal. **73** (1980), 349–389.

[5] P.G. Ciarlet and P. Destuynder, *A justification of the two-dimensional linear plate model.* J. Mécanique **18** (1979), 315–344.
[6] D. Cioranescu and P. Donato, *Exact internal controllability in perforated domains.* J. Math. Pures Appl. **68** (1989), 185–213.
[7] D. Cioranescu and J. Saint Jean Paulin, *Homogenization in open sets with holes.* J. Math. Anal. Appl. **71** (1979), 590–607.
[8] D. Cioranescu and J. Saint Jean Paulin, *Homogenization of Reticulated Structures.* Applied Mathematical Sciences **136**. Springer, New York, 1999.
[9] A. Haraux, *Semi-linear hyperbolic problems in bounded domains.* Math. Rep. **3** (1987), *no.* 1, I–XIV & 1–281.
[10] V. Komornik, *Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method.* Masson & Wiley, Paris, 1994.
[11] J.L. Lions, *Contrôlabilité exacte. Perturbations et stabilisations des systèmes distribués,* Tomes 1 et 2, Masson, Paris, 1988.
[12] J.L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications,* Vol. 1. Dunod, Paris, 1988.
[13] F. Murat, *Compacité par compensation.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **5** (1978), 485–507.
[14] J. Saint Jean Paulin et L.R. Tcheugoué Tébou, *Contrôlabilité exacte interne dans des domaines perforés avec une condition aux limites de Fourier sur le bord des trous.* Asymptotic Analysis **14** (1997), 193–221.
[15] L.R. Tcheugoué Tébou, *Étude de quelques problèmes de contrôlabilité exacte et stabilisation dépendant ou non de petits paramètres.* Thése de Doctorat, Université de Metz, Metz, 1995.

Reçu le 3 juillet 2006 et
en forme finale le 16 novembre 2007

Université Mentouri Constantine
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques
Route Ain El Bey
Constantine 25017, Algérie
aib.nadia@yahoo.fr